$ax^2 + bx + c$

$\sqrt[3]{Ax^2 + 4}$



Algebra



INDICE

CAPÍTULO 1: LOGICA Y CONJUNTOS

CAPÍTULO 2: NUMEROS REALES

CAPÍTULO 3: ECUACIONES E INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

CAPÍTULO 4: FUNCIONES

CAPÍTULO 5: FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

CAPÍTULO 6: POLINOMIOS

CAPÍTULO 7: NÚMEROS COMPLEJOS

CAPÍTULO 8: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES

CAPÍTULO 9: MATRICES Y DETERMINANTES

CAPÍTULO 10: SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS

CAPÍTULO 11: PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

CAPÍTULO 1

LOGICA Y CONJUNTOS

1.0 OBJETIVOS

Todos los tópicos relativos a las matemáticas se razonan desde el punto de vista lógico y por lo tanto se debe tener en cuenta el enunciado de las proposiciones matemáticas y su consecuente validez. El objetivo de este capítulo es presentar los aspectos principales de lógica y teoría de conjuntos necesarios para tal fin.

1.1 PROPOSICIÓN LÓGICA

Proposición lógica, es todo enunciado que puede ser calificado bien como *verdadero* (V) o bien como *falso* (F) sin ambigüedad.

Notación

Las proposiciones lógicas se denotan por:

$p, q, r, s, t, \ldots$

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$

EJEMPLO 1

p: Lima es la capital del Perú (V)

q: $7 + 3 \geq 12$ (F)

Observación:

Los enunciados que expresan una exclamación, una pregunta o una orden, no son proposiciones lógicas.

a) ¡Arriba Alianza!

b) ¿Dónde vives?

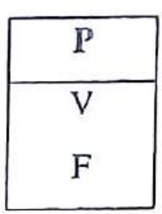
c) Prohibido fumar en clase

Con respecto a estos enunciados observamos que no es posible indicar si son verdaderos o falsos.

Valor de verdad:

Es el calificativo que se le da a una proposición lógica según sea *verdadera* (V) o *falsa* (F), entonces cada proposición lógica tiene un solo valor de verdad o bien verdadero o bien falso.

Tabla de verdad



P
V
F

Clases de proposiciones lógicas:

1. Proposición simple (atómica o elemental).- Son enunciados que tienen un solo sujeto y un solo predicado.

EJEMPLO 2

p: En el satélite natural luna, no hay gravedad.

2. Proposición compuesta (molecular).- Son aquellas proposiciones que se obtienen de la combinación de dos o más proposiciones simples, las cuales están enlazadas o ligadas entre si por ciertas palabras como: "no", "o", "y", "implica", "si y solo si".

EJEMPLO 3

q: "Pedro nació en Piura" y "Piura está en el Perú" entonces "Pedro es Peruano"

En seguida veremos como se pueden formar proposiciones compuestas.

1.2 OPERACIONES CON PROPOSICIONES LOGICAS

Conectivos lógicos.- Son símbolos que enlazan proposiciones simples, sin formar parte de ellas.

Clases de conectivos lógicos

La negación: Dada una proposición p se puede formar otra proposición que se llama la negación de p.

Se simboliza: ~p

Se lee: no p; no es cierto que p.

EJEMPLO 1

Madrid está en España, su negación es i) también ii)

i) Es falso que Madrid está en España

ii) Madrid no está en España.

Tabla de verdad

p	~p
V	F
F	V

La conjunción: Dos proposiciones cualesquiera p y q se pueden unir por medio de la palabra "y" para formar una proposición compuesta llamada conjunción de ellas.

Si p es verdadera y q es verdadera la conjunción es verdadera en cualquier otro caso, es falso.

EJEMPLO 2

Madrid está en España y 2 + 1 = 4, la proposición es falsa.

EJEMPLO 3

4 > 2 y 2 > 0. La proposición es verdadera.

Se simboliza: $p \wedge q$

Se lee: p y q

Tabla de verdad:

p	q	p v q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La disyunción inclusiva

Dos proposiciones cualesquiera p y q se pueden unir por medio de la palabra "o" (entiéndase y/o) para formar una proposición compuesta llamada disyunción de ellas.

Si al menos una de las proposiciones (p, q) es verdadera la disyunción resulta ser verdadera.

EJEMPLO 4

Madrid está en Francia o está en Portugal: Es Falso

EJEMPLO 5

$2 + 2 = 4$ ó $3 + 5 = 6$. Es Verdadero

Se simboliza: p v q

Se lee: p ó q

Tabla de verdad

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La condicional

Dada dos proposiciones cualesquiera p y q se puede formar la proposición compuesta "si p entonces q" llamada condicional, p es el antecedente y q el consecuente. La condicional es verdadera salvo que p sea verdadero y q falso en cuyo caso es falso.

EJEMPLO 6

Si $2 > 1$ entonces 2 es positivo, es verdadero.

EJEMPLO 7

Si Madrid está en Francia entonces $2 + 2 = 4$, es falso.

Se simboliza: $p \rightarrow q$

Se lee: "si p, entonces q"

" p implica q"

Tabla de verdad

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V

La bicondicional

Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q se puede formar la proposición compuesta "p si y sólo si q" llamada bicondicional.

La bicondicional es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad. Es decir, si p y q tienen valores de verdad opuestos la bicondicional es falsa.

EJEMPLO 8

$2 > 1$ si y solo si $-1 > -2$, es verdadero.

EJEMPLO 9

Madrid está en Francia si y solo si $2 + 2 = 4$, es falsa.

Se simboliza: $p \leftrightarrow q$

Se lee: "p si y sólo si q"

"p si y solamente si q"

Tabla de verdad

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La disyunción exclusiva (Δ)

Dadas las proposiciones p y q se puede formar la proposición compuesta: "o bien p o bien q" llamado disyunción exclusiva.

Esta proposición es verdadera cuando las proposiciones p y q tienen valores de verdad opuestas. Es decir, ella es falsa si ambas proposiciones componentes tienen el mismo valor de verdad.

EJEMPLO 10

O bien $3 > 2$ o bien $2 > 1$, es falso.

EJEMPLO 11

O bien Madrid está en España o bien está en Francia, verdadero.

Se simboliza: $p \Delta q$

Se lee: "o bien p o bien q"

"p o q pero no ambos"

Tabla de verdad

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Evaluación de proposiciones compuestas

La evaluación de proposiciones compuestas consiste en hallar los valores tentativos del *operador principal* a partir de la validez de cada una de las proposiciones simples componentes.

En general, el valor de verdad de la proposición compuesta depende del valor de verdad de las proposiciones componentes, sin embargo existen proposiciones compuestas, cuyo valor de verdad no dependen de los valores de verdad de las proposiciones que las componen.

Tautología: Una proposición es una tautología cuando es verdadera cualquiera sea el valor de verdad las proposiciones componentes.

EJEMPLO 12

$p \vee \sim p$, es una tautología

p	~p	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

EJEMPLO 13

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

p	q	p ∧q	p ∨ q	(p∧q)→(p∨q)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Contradicción: Una proposición es contradictoria cuando es falsa cualquiera sea el valor de verdad de las proposiciones componentes.

EJEMPLO 14

$p \wedge \sim p$ es una contradicción

p	~p	p ∧~p
V	F	F
F	V	F

Contingencia: Una proposición es una contingencia si el valor de verdad de su operador principal contiene al menos un verdadero (V) y al menos un falso (F).

Proposiciones Lógicamente Equivalentes

Dos proposiciones p y q son equivalentes si $p \leftrightarrow q$ es una tautología.

Se denota por: $p \equiv q$

EJEMPLO 15

$r \rightarrow s \equiv \sim s \rightarrow \sim r$

en efecto:

r	s	r → s	~s → ~p	(r→s)↔(~s→~p)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Si dos proposiciones son equivalentes, sus valores de verdad tienen un orden idéntico. Ver columnas 3 y 4 del ejemplo.

1.3 LEYES DEL ALGEBRA PROPOSICIONAL

Disyunción inclusiva

1. $p \vee p \equiv p$
2. $p \vee q \equiv q \vee p$
3. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
4. $p \vee (p \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5. $p \vee F \equiv p$
6. $p \vee V \equiv p$
7. $p \vee (\sim p) \equiv V$
8. $\sim(\sim p) \equiv p$

Leyes de Morgan

1. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
2. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Leyes de absorción

1. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
2. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Conjunción

1. $p \wedge p \equiv p$
2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
4. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. $p \wedge F \equiv F$
6. $p \wedge V \equiv p$
7. $p \wedge (-p) \equiv F$
8. $\sim V \equiv F;\ \sim F \equiv V$

Leyes complementarias

1. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
2. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
3. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$
4. $p \,\Delta\, q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

EJEMPLO 1

Hallar el valor de verdad de: $\sim[(p \wedge q) \rightarrow p]$

Solución:

$$\sim[(p \wedge q) \rightarrow p] \equiv \sim[\sim(p \wedge q) \vee p] \equiv \underbrace{(p \wedge q) \wedge \sim p}_{\text{Asociando}} \equiv \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \wedge q \equiv F \wedge q \equiv F.$$

1.4 CONJUNTOS

DEFINICIÓN 1

Conjunto es toda agrupación de objetos distinguibles entre sí, lo cual nos permite afirmar que un objeto pertenece o no a dicha agrupación. A los objetos que pertenecen a dichos conjuntos se les llama elementos.

Notación:

Conjuntos: $A, B, C, \ldots, Z$

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

Determinación de conjuntos

Por extensión.- Es cuando se listan cada uno de los elementos del conjunto.

Ejemplo: $A = \{-2, 0, 2, 4, 5\}$

Por comprensión.- Es cuando los elementos pueden expresarse mediante una ley de formación "*fórmula*" común que los caracteriza.

$$B = \left\{ x / x = \frac{n}{2^n + 1}, n \in N, \quad 1 \leq n \leq 4 \right\}$$

Conjuntos especiales

Conjunto universal (U).- Es un conjunto referencial que contiene a todos los elementos que se están considerando en un estudio particular.

Conjunto unitario.- Es aquel que posee un solo elemento, como por ejemplo:

$A = \{3\}$

$B = \{7,7,7,7,7,7\} = \{7\}$

$C = \{\{3,2\}\}$

Conjunto vacío.- Es aquel conjunto que no posee elementos.

Se denota: Φ, { }

Cuantificadores

Funciones lógicas.- Dado un conjunto A no vacío, una función lógica o enunciado formal sobre A es una forma o expresión que se denota por p(x), que tiene la cualidad que p(x) es verdadero o falso para cada elemento a de A.

Es decir p(x) se convierte en una proposición lógica para cada x = a de A.

p(x): $x - 4 > 0$ sobre A = N conjunto de los enteros positivos, p(x) es una función lógica sobre N, p(1) es falso, p(5) es verdadero.

EJEMPLO 1

p(x): x es múltiplo de 3 definido sobre N.

p(3) es verdadero y p(2) es falso.

EJEMPLO 2

p(x): $x + 3 = 5$ sobre conjunto de los enteros.

EJEMPLO 3

Sea p(x): x – 4 > 0 sobre N entonces el conjunto de validez es

$$\{x/x \in N\ x - 4 > 0\} = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$$

EJEMPLO 4

Sea p(x): x es múltiplo de 3 definido sobre N.

$$\{x/x \in N\} = \{3, 6, 9, \ldots\}$$

EJEMPLO 5

Sea p(x): x + 3 = 5 sobre N el conjunto validez es

$$\{x/x \in N, x + 3 = 5\} = \{2\}$$

Es posible que el conjunto de validez puede ser todo A, una parte de A o ningún elemento de A.

Cuantificador universal.- Sea p(x) una función lógica sobre A. Entonces la proposición

"para todo elemento x de A, p(x) es verdadero" (1)

El símbolo ∀ que se lee "para todo" se llama cuantificador universal.

La afirmación (1) es equivalente a

$$\{x/x \in A, p(x)\} - A$$

EJEMPLO 6

$\forall\ n \in N,\ n + 1 > 1$ es verdadero, o sea

$$\{x/x \in N, n + 1 > 1\} = N$$

EJEMPLO 7

$\forall\ n \in Z,\ n + 1 > 1$, donde Z conjunto de los números enteros, es falso, pues

$$\{x/x \in Z, n + 1 > 1\} = \{0,1,2,3, \ldots\} \neq Z$$

EJEMPLO 8

$\forall\ n \in N, n + 1 > n + 2$ es falso, pues

$$\{x/x \in Z, n + 1 > n + 2\} = \varnothing$$

Cuantificador existencial.- Sea $p(x)$ una función lógica sobre un conjunto A. Entonces "existe un x elemento de A tal que $p(x)$ sea verdadero" es una proposición que se expresa;

$$\exists\, x \in A\, /\, p(x) \qquad (2)$$

El símbolo $\exists$ que se lee "existe" o "para algún" o "para al menos un" se llama cuantificador existencial.

La afirmación (2) equivale a

$$\{x/x \in A,\, p(x)\} \neq \varnothing$$

EJEMPLO 9

La proposición: $\exists\, n \in N\, /\, n + 2 = 4$

es verdadero pues $\{n/n \in N,\, n + 2 = 4\} \neq \varnothing$

EJEMPLO 10

La proposición: $\exists\, n \in N\, /\, n + 2 < 1$

es falsa pues $\{n/n \in N,\, n + 2 < 1\} = \varnothing$

Negación de proposiciones con cuantificadores.- La negación de las proposiciones que involucran los cuantificadores se dan de la siguiente manera:

1. $\sim[\forall\, x \in A/p(x)] \equiv \exists\, x \in A/\sim p(x)$
2. $\sim[\exists x \in A/p(x)] \equiv \forall\, x \in A,\, \sim p(x)$.

EJEMPLO 11

$\sim[\forall n \in N,\, n + 1 > 1] \equiv \exists n \in N\, /\, n + 1 \leq 1$

EJEMPLO 12

$\sim[\exists n \in N/n + 2 = 4] \equiv \forall\, x \in N\, /\, n + 2 \neq 4$

Inclusión.- El conjunto A está incluido en el conjunto B si y solo si todos los elementos de A son también elementos del conjunto B.

Notación: $A \subset B$.

$$A \subset B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$$

y se dice que A es un subconjunto de B.

Nota:

$A \subset B$: "A está contenido en B"

$M \supset T$: "T está contenido en M"

Propiedades: Sean A, B y D conjuntos arbitrarios:

1) $A \subset A$, propiedad reflexiva.

2) Si $A \subset B \wedge B \subset D \rightarrow A \subset D$, propiedad transitiva

3) Si $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$, propiedad antisimétrica

4) Para todo conjunto A, se tiene que $\Phi \subset A$.

Igualdad.- Dos conjuntos A y B son iguales si y solo si ellos tienen los mismos elementos, o sea

$$A = B \leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

EJEMPLO 13

$A = \{1, 2, a, b\}$

$B = \{1, 1, 2, a, b, b, a\}$

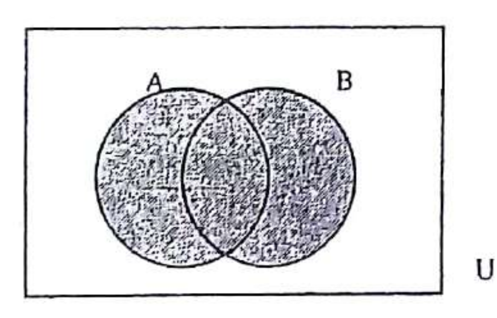
$A = B$ por que $B = \{1, 2, a, b\}$ tiene los mismos elementos que el conjunto A. Si $A \subset B$ y $A \neq B$ entonces A es un subconjunto propio de B.

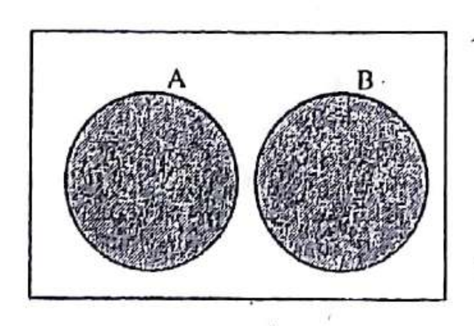
1.5 OPERACIONES CON CONJUNTOS

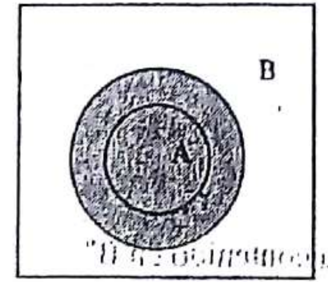
Dados los conjuntos A, B y el conjunto universal U, se tiene definidos las siguientes operaciones.

Unión ($A \cup B$)

$A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$

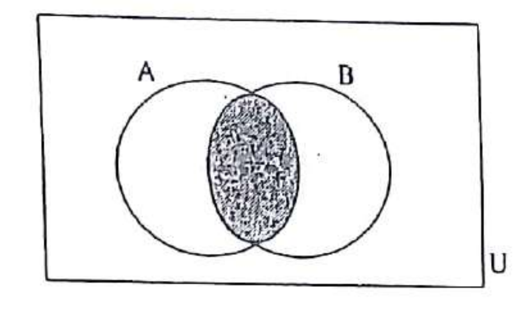


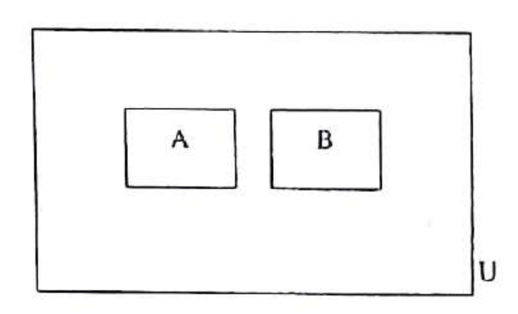




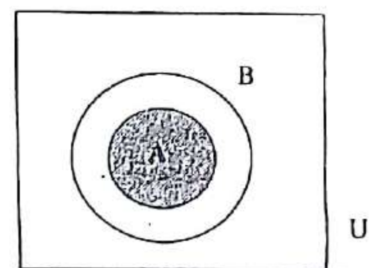
Intersección (A ∩ B)

$A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge \in B\}$





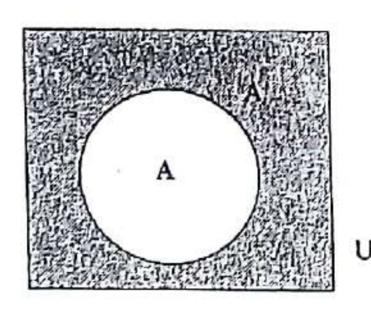
$A \cap B = \Phi$



$A \cap B = A$

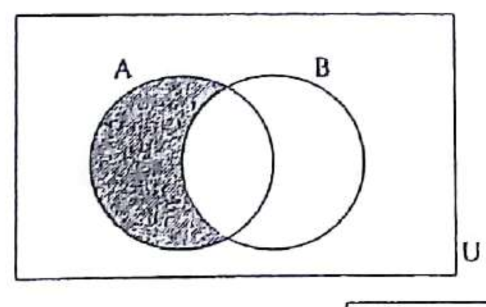
Complemento de un conjunto

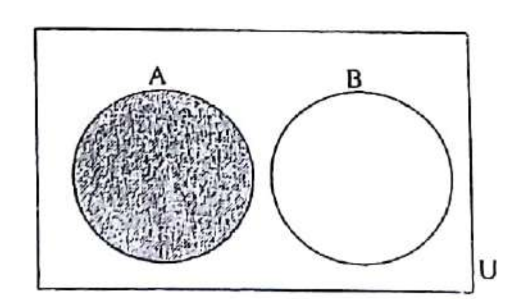
$A^C = A' = \{x \in U / x \notin A\}$

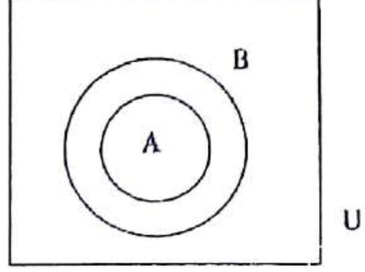


Diferencia de Conjuntos

$A = B = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}$



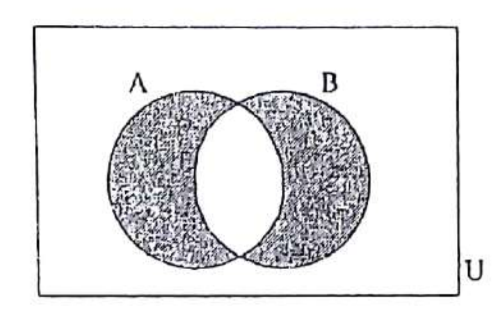


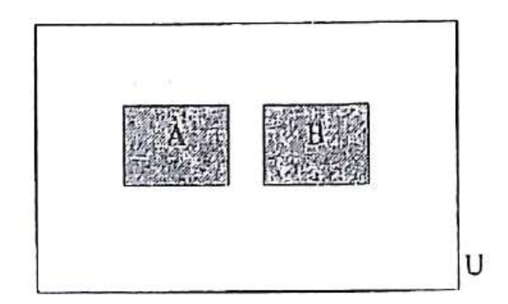


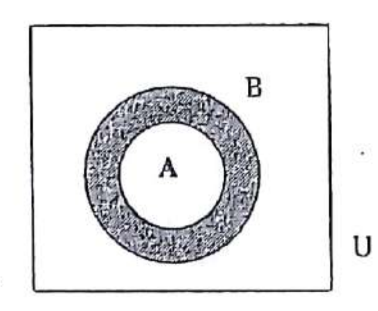
$A - B = \Phi$

Diferencia simétrica

$A \Delta B = \{x \in U / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$







$A \Delta B = B - A$

1.6 LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Unión

1) $A \cup A = A$
2) $A \cup B = B \cup A$
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5) $A \cup \Phi = A$
6) $A \cup U = U$
7) $A \cup A^C = U$
8) $(A^C)^C = A$

Intersección

1) $A \cap A = A$
2) $A \cap B = B \cap A$
3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5) $A \cap \Phi = \Phi$
6) $A \cap U = A$
7) $A \cap A^C = \Phi$
8) $U^C = \Phi$, $\Phi^C = U$

Leyes de Morgan

1) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
2) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Leyes de absorción

1) $A \cup (A \cap B) = A$
2) $A \cap (A \cup B) = A$

Leyes complementarias

1) $A - B = A \cap B^C$
2) $A \Delta B = B \Delta A = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

1.7 CONJUNTO POTENCIA

El conjunto potencia del conjunto A es aquel cuyos elementos son todos los subconjuntos de A, tal conjunto se denota por P(A) o 2^A.

Así

$$P(A)=2^A = \{X/X \subseteq A\}$$

EJEMPLO 1

Si $A = \{1, 2, \Phi\}$

$$P(A) = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{\Phi\}, \{1,2\}, \{1,\Phi\}, \{2,\Phi\}, \{1,2,\Phi\}\}$$

Propiedades:

1) $P(\Phi) = \{\Phi\}$ por definición
2) $a \in A \leftrightarrow \{a\} \in P(A)$
3) $A \subset B \leftrightarrow A \in P(B)$
4) $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$
5) $A = B \leftrightarrow P(A) = P(B)$
6) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
7) $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

1.8 NÚMERO CARDINAL DE UN CONJUNTO FINITO

Es el número de elementos que forman el conjunto A.

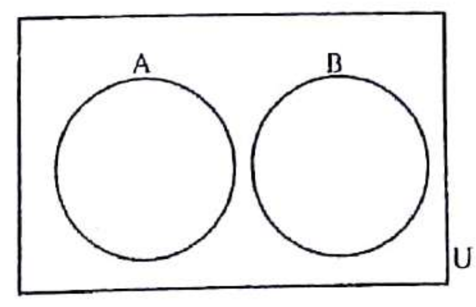
Notación: $\eta(A)$ ó card(A).

EJEMPLO 1

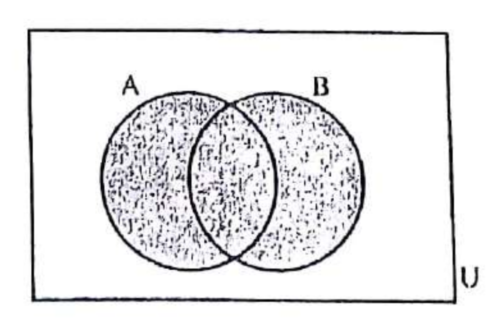
Sea $A = \{1, 2, 2, 1, 1, 2\} \Rightarrow \eta(A) = 2$

Propiedades:

1. $\eta(\Phi) = 0$
2.



$\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B)$



$\eta(A \cup B)=\eta(A)+\eta(B)-\eta(A \cap B)$

3. Si A, B y C son conjuntos finitos no vacíos.

$\eta(A \cup B \cup C) = \eta(A) + \eta(B) + \eta(C) - \eta(A \cap B) - \eta(A \cap C) - \eta(B \cap C) + \eta(A \cap B \cap C)$.

4. Si $\eta(A) = n \Rightarrow \eta[P(A)] = 2^n$.

1.9 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Si el valor de verdad de la siguiente proposición:

$(r \cup s) \rightarrow [(p \cap \sim s) \rightarrow (p \cap \sim q)]$ es *falso*, hallar el valor de verdad de las proposiciones

I) $(p \cap \sim q) \leftrightarrow r$ II) $q \cap (\sim p \cup \sim s)$ III) $[\sim p \rightarrow r] \cup \sim s$

Solución:

$$\underbrace{\overset{(*3)}{(r \vee s)}}_{V} \rightarrow \underbrace{[\underbrace{\overset{(*1)}{(\underset{V}{p} \wedge \underset{V}{\sim s})}}_{V} \rightarrow \underbrace{\overset{(*2)}{(\underset{V}{p} \wedge \underset{F}{\sim q})}}_{F}]}_{F} \Rightarrow \begin{cases} \text{De}(*1)\begin{cases} \overset{\text{P es V}}{\sim s \text{ es V}} \Rightarrow s \text{ es F} \end{cases} \\ \text{De}(*2) \ \sim q \text{ es F} \Rightarrow q \text{ es V} \\ \text{De}(*3) \ \underset{V}{r} \vee \underset{F}{s} \equiv V \quad r \text{ es V} \end{cases}$$

Luego tenemos:

I) $\underbrace{\underbrace{(\underset{V}{p} \wedge \underset{F}{\sim q})}_{F} \leftrightarrow \underset{V}{\underset{V}{r}}}_{(F)}$

II) $\underbrace{\underset{V}{\underset{V}{q}} \wedge \underbrace{(\underset{V}{\sim p} \wedge \underset{V}{\sim s})}_{V}}_{(V)}$

III) $\underbrace{\underbrace{[\underset{F}{\sim p} \rightarrow \underset{V}{r}]}_{V} \vee \underset{V}{\sim s}}_{(V)}$

PROBLEMA 2

1) Simplificar la siguiente proposición $t = \{(\sim p \vee q) \vee [(p \rightarrow q) \wedge r]\} \wedge q$

Solución:

Sabemos que $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$t = \{(\sim p \vee q) \vee [(\sim p \vee q) \wedge r]\} \wedge q$

Absorción

$t = (\sim p \vee q) \wedge q$

$t = q \wedge (q \vee \sim p) \Rightarrow t = q$

Absorción

PROBLEMA 3

Se definen las operaciones: $p * q = \sim p \to \sim q$

$p \# q = \sim p \wedge q$

simplificar: $[(\sim p) * q] \# [(\sim q) \# p]$

Solución:

$$\sim p * q = \sim(\sim p) \to \sim q = p \to \sim q = \sim p \cup \sim q = \sim(p \cap q)$$

$$\sim q \# p = \sim(\sim q) \cap p = q \cap p = p \cap q$$

Entonces:

$$[(\sim p)*q] \# [(\sim q) \# p] = [\sim(p \cap q)] \# [p \cap q]$$

$$= (p \cap q) \cap (p \cap q)$$

$$= p \cap q.$$

PROBLEMA 4

Sabiendo que:

p	q	p o q
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

y si [(p o q) o r] o s es falso

Hallar los valores de verdad de:

I) $p \to r$ II) $s \to r$ III) $\sim p \leftrightarrow q$

Solución:

De la tabla de verdad: p o q es Falso $\leftrightarrow$ p es F $\wedge$ q es V

[(p o q) o r] o s es falso

F V → F; F V → F; F V

p es F

q es V

r es V

s es V

I) $p \to r$

$\underbrace{F \to V}_{V}$

II) $s \leftrightarrow r$

$\underbrace{V \leftrightarrow V}_{V}$

III) $\sim p \leftrightarrow q$

$\underbrace{V \leftrightarrow V}_{V}$

PROBLEMA 5

Definamos la proposición lógica compuesta: p o q, mediante la siguiente tabla de verdad.

p	q	p o q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si se sabe que: (p o q) o (p o q) es falsa, entonces es posible afirmar que

A) p y q son verdaderos
B) Sólo q es verdadero
C) Sólo p es verdadero
D) p y q son falsas
E) p es la negación de q

Solución:

Se puede observar que:

$$p \text{ o } q = \sim(p \vee q)$$

$$(p \text{ o } q) \text{ o } (p \text{ o } q) = F$$

$$t \text{ o } t = \sim(t \vee t) = \sim t = \sim(p \text{ o } q) = \sim(\sim(p \vee q))$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ F}}{p} \vee \underset{\substack{\uparrow \\ F}}{q} = F$$

entonces p y q son falsas.

PROBLEMA 6

Se define el conjunto: A = {3; 7; {5,7}, {8}, {1,3,8}; 8; Φ}

Decir cuantas de las proposiciones son verdaderas.

I) $\Phi \in A$
II) $\{\Phi\} \subset A$
III) $\{5,7\} \in A$
IV) $\{5.7\} \subset A$
V) $\{1, 3, 8\} \subset A$
VI) $\{\{5,7\}; \{8\}\} \in A$
VII) $\{\{5,7\}; \{8\}\} \subset A$
VIII) $\{3,7\} \subset A$

Solución:

I) V II) V III) V IV) F V) F VI) F VII) V VIII) V

PROBLEMA 7

Usando las leyes del álgebra de conjuntos, simplificar: $\{[(A-B)\cap B]\cap[(A\cup B)\cap C]\}^C$

Solución:

$$(A - B) \cap B = (A \cap B^C) \cap B = \Phi$$

Además $\Phi \cap X = \Phi$

$$\{\Phi \cap [(A \cup B) \cap C]\}^C = \Phi^C = U$$

PROBLEMA 8

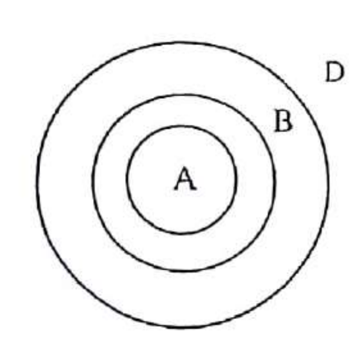
Si A, B y D son conjuntos tales que $A \subset B \subset D$.

Simplificar: $[(A\cap D)\cup(B-D)] \cup [(A\cup B\cup D)\cap(B-A)]$

Solución:

$A \cap D = A$ $\qquad$ $A \cup B \cup D = D$

$B - D = \Phi$



Simplificando $[(A\cap D)\cup(B-D)] \cup[(A\cup B\cup B)\cap(B-A)]$

Φ $\qquad$ D

$$(A \cap D) \cup [(D \cap (B - A)]$$

$$A \cup (B - A) = B$$

PROBLEMA 9

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) $\{\phi\} \cup \{0\} = \{0\}$

II) $\phi \cap \{\phi\} = \phi$

III) $\phi \cup \{0\} = \{0\}$

IV) $\{2, \phi\} \in \{1, 2, \phi, 3\}$

Solución:

I) Es falso: $\{\Phi\} \cup \{0\} = \{\Phi,0\}$

II) Es verdadero: $\Phi \cup \{0\} = \{0\}$

III) Es verdadero: $\Phi \cap \{\Phi\} = \Phi$

IV) Es falso: $\{2, \Phi\} \notin \{1,2,\Phi,3\}$

PROBLEMA 10

Si $M = [2,4\rangle$ y $p = \langle 3,8\rangle$. Hallar $S = [M^C - (M \cap p)^C]^C$, siendo el conjunto de los números reales el universo.

A) $[0, \infty\rangle$ B) Φ C) R D) $\langle 3,4\rangle$ E) $[2, 3\rangle$

Solución:

$$S = [M^C - (M \cap P)^C]^C = \underbrace{[M^C \cap (M \cap p)]}_{\Phi}{}^C = \Phi^C = U = R \qquad (C)$$

1.10 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I) $A \subset B \to P(A) \subset P(B)$

II) $P(A \cap B) \subset P(A)$

III) $A \in P(A)$

A) FVF B) FVV C) FFV D) VVV E) VVF

PROBLEMA 2

Si A, B y C son conjuntos y $A \cap C = \Phi$, entonces al simplificar el conjunto: $\{[(C \cup B) \cap A] \cup C^C\} \cap B$ se obtiene

Nota: C^C = Complemento de C.

A) $B \cap C$ B) $B \cup C^C$ C) $B \cap C^C$ D) $B^C \cap C$ E) $B^C \cup C$

PROBLEMA 3

Dado el universo $U = \langle -8,4\rangle \cup \{5,7\}$ y el conjunto: $A=\{x \in U / x < 2 \to x > 5\}$. Hallar el conjunto $B = \{3 - x / x \in A \wedge x \in Z\}$. Dar como respuesta el producto de sus elementos.

Nota: Z conjunto de los enteros.

A) –5 B) –3 C) 0 D) 6 E) 12

PROBLEMA 4

Dados los conjuntos: $A = \{0,1\}$, $B = \{\Phi,\{0\}\}$; $C = \Phi$. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\{1\} \subset P(A)$, $P(A)$ potencia de A

II) $P(A) \cap B \cap C \neq \Phi$

III. $\eta(C) \in A$, $\eta(C)$ número de elementos de C

IV. $P(C) \in p(B)$

A) VFVV B) FVFV C) FVVV D) VFVF E) FFVV

PROBLEMA 5

Se define la operación * entre conjuntos como sigue: $A * B = A^C \cap B^C$ ¿Cuáles son verdaderas?

a) $A * A = A^C$

b) $(A * A) * (B * B) = A \cap B$

c) $(A * B) * (A * B) = A \cup B$

A) Sólo a B) a y c pero no b C) Sólo c

D) a, b y c E) Todas son falsas.

PROBLEMA 6

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) Si $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$

b) $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

c) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

A) VVV B) VFF C) FVF D) FFV E) FFF

PROBLEMA 7

Sean los conjuntos:

$A = \{x \in Z_0^+ / -11 < 2x - 5 < 9\}$, Z_0^+ enteros no negativos.

$B = \{x \in A / x^2 - 2x \notin A\}$.

Hallar la suma de los elementos de B.

A) 13 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

PROBLEMA 8

¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I) Si $C = \{\{3\}, 3, \{\{3\}\}, \{\phi\}\}$ entonces $\{\{3\}\} \subset P(C)$

II) $B - (A \cup B) \in P(A \cap B)$ y $A \Delta B \in P(A \cup B)$, para A y B conjuntos cualesquiera.

III) Si $D = \Phi$ entonces $p(D) = \Phi$.

Nota: P(C) conjunto potencia de C.

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) I y III E) I y II

PROBLEMA 9

Dados a, b números racionales, A y B conjuntos tales que $B \neq \Phi$, $A \cup B$ unitario, $A = \{a^2 + 2b, b^2 + 1\}$ y $A \cup B = \{a + 4b, b + 1 - 3a\}$. Hallar $A \cap B$.

A) {0} B) Φ C) {74/79} D) {2} E) {10}

PROBLEMA 10

En un avión que transporta 100 personas, 50 no fuman y 30 no beben. Si hay 10 personas que solamente beben ¿Cuántas personas ni fuman ni beben o fuman y beben?

A) 60 B) 59 C) 61 D) 62 E) 63

PROBLEMA 11

Se define la operación * entre los conjuntos A y B de la siguiente forma: $A * B = A^C \cup B^C$. ¿Qué proposiciones son verdaderas?

IV) $A * A = A^C$

V) $(A * A) * (B * B) = A \cup B$

VI) $A * (B * C) = (A * B) * C$

A) I B) II C) III D) I y II E) I y III

PROBLEMA 12

Sea $A = \{3, 5, \{2,8\}\}$. Indicar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\exists X \in P(A) / 2 \in X$

II) $\exists X \in P(A) / \{3\} \subset X$

III) $\exists X \in P(A) / \{2,8\} \subset X$

A) FVF B) FVV C) VVF D) FFV E) VVV

PROBLEMA 13

Sean los conjuntos A, B y C tales que:

$\eta(A) = 14$; $\eta(B) = 11$; $\eta(A \cup B) = 20$; $\eta(A \cap B^C \cap C^C) = 5$; $\eta(A^C \cap B^C \cap C^C) = 3$;

$\eta(A \cap B \cap C) = 2$; $\eta(V) = 30$; $\eta[C - (A - B)] = 7$. Hallar $\eta(B^C - C^C)$.

A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 17

PROBLEMA 14

Sea $A = \{1, a, \Phi, \{1\}, \{\phi\}\}$

$B = \{1, b, c, d, e\}$

Hallar: $\eta\ [P(A) \cup P(B)]$

A) 64 B) 62 C) 60 D) 72 E) 63

PROBLEMA 15

En un salón de 65 personas, 45 son hombres, a 53 de las personas la biblioteca les presta un libro de álgebra para cada una, 8 mujeres tuvieron necesidad de comprar el libro. ¿Cuántos hombres no compraron el libro?. Suponer que todas las personas van a clase con tal libro.

A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

1.11 TEST DE AUTOEVALUACION

PROBLEMA 1

1. De los enunciados siguientes:

I) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

II) El cero es un número racional

III) $7 + 3 < 8 + 4$

IV) $x^4 - 1 > 256 - 1$

V) $2 - 1 = 1$

A) 2 son proposiciones

B) 3 son proposiciones

C) 4 no son proposiciones

D) 3 no son proposiciones

E) Todas son proposiciones

PROBLEMA 2

Si la siguiente proposición: $(\sim p \wedge q) \rightarrow r$ es falsa. Hallar el valor de verdad de p, q y r en ese orden.

A) FVF B) FFF C) FVV D) VFF E) FFV

PROBLEMA 3

Al simplificar la proposición: $\sim[\sim(p \wedge \sim q) \rightarrow p] \vee q$ se obtiene:

A) $\sim p \wedge q$ B) $p \leftrightarrow q$ C) $\sim q \vee p$ D) $\sim q \wedge p$ E) $p \rightarrow q$

PROBLEMA 4

Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si $\eta(A) = 4$ y $\eta(B) = 5$ entonces el número máximo de elementos de $C = P(A) \cup P(B)$ es 48.

II) Si $M = \{n^2 - 1 / n \in Z,\ 4 \leq n^2 \leq 9\}$ entonces $\eta(M) = 2$

III) Si $A = \phi$; $B = \phi$ entonces $\eta[P(A \cup B)] = \Phi$

A) VVF B) VFV C) FFV D) FVF E) FFF

PROBLEMA 5

Sea el conjunto $B = \{n; \{n\}, \Phi, 7\}$. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\{n\} \in B \wedge \Phi \in B$

II) $\phi \in B \vee \{\phi\} \subset B$

III) $\{\phi, n\} \subset B \rightarrow \{n; \{n\}\} \in B$

A) VVV B) VFV C) VFF D) VVF E) FFF

PROBLEMA 6

Dados 2 conjuntos disjuntos A y B; de "n" y "n + 2" elementos respectivamente. Se sabe que el número de subconjuntos de uno de ellos es mayor que el del otro en 3072. Hallar el valor de n – 1.

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

PROBLEMA 7

Sea $A = \{x \in Z / \sim [x \leq -3 \vee x > 5]\}$. Hallar $\eta[p(A)]$.

A) 64 B) 128 C) 256 D) 512 E) 1024

PROBLEMA 8

Si al simplificar el conjunto: $(A - B) \cup (B^C - A^C)$ se obtiene

A) $A \cup B$ B) $A^C \cap B$ C) $A - B$ D) $B - A$ E) Φ

PROBLEMA 9

Si $A = \{\{2,2\}, \{2\}, 2\}$. Hallar el valor de verdad.

I) $\eta(A) = 3$ II) $\eta[P(A)]$ III) $\eta[P(P(A))] = 3$

A) VVF B) VVV C) FFV D) FVF E) FFF

PROBLEMA 10

De 80 personas encuestadas sobre el uso de cigarrillos, se ha obtenido que 20 mujeres no fuman y de los encuestados, 44 son hombres ¿cuántas mujeres fuman?

A) 16 B) 15 C) 13 D) 12 E) 10

1.12 CLAVE DE RESPUESTAS

Problemas propuestos:

1) D	6) A	11) D
2) C	7) C	12) A
3) C	8) E	13) C
4) E	9) E	14) B
5) D	10) A	15) C

Test de autoevaluación:

1) B	6) B
2) A	7) C
3) E	8) C
4) D	9) D
5) D	10) A



CAPÍTULO 2

NUMEROS REALES

2.0 OBJETIVOS

El objetivo de este capítulo es presentar las propiedades básicas de los números reales, para poder resolver ecuaciones e inecuaciones con o sin valor absoluto de una manera eficiente.

2.1 EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES: DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

Es un conjunto denotado por R, con dos operaciones entre sus elementos: suma (+) y multiplicación (.), y una relación de orden "<" que se lee 'es menor que', que satisface los siguientes axiomas.

Axiomas de la adición:

A1 Ley de clausura: Para todo a, b $\in$ R: a + b $\in$ R, la suma a + b es también un número real.

A2 Ley conmutativa: Para todo a, b $\in$ R: a + b = b + a, la suma de cualquier par de números reales es independiente del orden en que se suma.

A3 Ley asociativa: Para todo a, b, c $\in$ R

$(a + b) + c = a + (b + c)$

es decir, la suma de tres (o más) números reales es independiente del orden en que son agrupados como el resultado es el mismo, se denota a + b + c.

A4 Axioma de existencia y unicidad del elemento neutro aditivo: Existe uno y sólo un elemento en R denotado por "0" tal que para todo a $\in$ R,

$$a + 0 = 0 + a = a$$

A5 Axioma de existencia y unicidad del elemento inverso aditivo: Para cada número real **a**, existe un elemento en R, y solamente uno, denotado por (-a) tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Axiomas de la multiplicación:

M1 Ley de clausura: Para todo a, b $\in$ R: ab $\in$ R la multiplicación ab también es un número real.

M2 Ley conmutativa: Para todo a, b $\in$ R: ab = ba, la multiplicación de dos números reales es independiente del orden en que son multiplicados.

M3 Ley asociativa: Para todo a, b y c $\in$ R: (ab)c = a(bc), la multiplicación de tres (o más) números reales da el mismo resultado cualquiera sea la forma en que son agrupados. Puesto que el resultado es el mismo, se denota abc.

M4 Axioma de existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo: Existe uno y solo un elemento en R, denotado '1', tal que para todo $a \in R$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

M5 Axioma de existencia y unicidad del inverso multiplicativo: Para cada $a \neq 0$ en R, existe uno y sólo un elemento en R denotado por a^{-1}, tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Nota: Al elemento a^{-1} también se le denota 1/a.

Axioma de distributividad:

Para todo a, b y c en R: $a(b + c) = ab + ac$

$(a + b)c = ac + bc$

Axiomas de la relación de orden:

01 Ley de tricotomia: Dados a y b en R, entonces se cumple una y solamente una de las relaciones:

$$a < b, \text{ ó } a = b \text{ ó } b < a$$

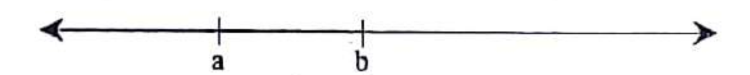
02 Ley transitiva: Para todo a, b y c en R se cumple que si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

03 Ley aditiva: Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$, para todo $c \in R$. El sentido de una desigualdad no cambia si ambos miembros se le suma un mismo número, que puede ser positivo, negativo o cero.

04 Si $a < b$ y $0 < c$ entonces $ac < bc$. El sentido de la desigualdad no cambia si se multiplica a ambos mientras por una misma cantidad positiva.

Interpretación geométrica de la relación de orden:

La correspondencia biunívoca que existe entre los números reales y los puntos sobre una recta se puede utilizar para dar una interpretación geométrica a la relación de orden <. La relación a < b establece que al graficar en una recta numérica horizontal, el número a se encuentra a la izquierda de b.



Observación: Existe un último axioma llamado el axioma del supremo que es satisfecho por el conjunto de los números reales, pero que en general no se cumple en el conjunto de los números racionales. El tratamiento de este axioma escapa del nivel del curso.

Subconjuntos notables de los números reales:

1. El axioma M4 asegura la existencia del número uno, 1, entonces aplicando sucesivamente el axioma de la cerradura A_1 y el axioma de la asociatividad A_3 se tiene:

$$1 + 1 = 2 \in \mathbb{R}$$

$$2 + 1 = 3 \in \mathbb{R}$$

$$(n-1) + n \in \mathbb{R}$$

Este conjunto así formado, denotado por N, se llama el conjunto de los números naturales. Así $N \subset \mathbb{R}$.

2. El axioma A5 asegura que para cada $n \in N$ existe un único elemento $-n \in \mathbb{R}$ y el axioma A4 asegura la existencia de $0 \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$Z = \{...-2, -1, 0, 1, 2,...\}$$

es llamado el conjunto de los números enteros. Así $N \subset Z \subset \mathbb{R}$.

3. El axioma M5 asegura que para cada $n \in Z$, $n \neq 0$, existe un único elemento $n^{-1} = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}$, entonces para todo $m \in Z$, el número denotado por m/n,

$$\frac{m}{n} = m.n^{-1} \in \mathbb{R}$$

Así el conjunto $Q = \{m/n \ / \ m, n \in Z, n \neq 0\}$ llamado los racionales están contenidos en $\mathbb{R}$ y se tiene $N \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R}$.

Intervalos:

Son conjuntos de números definidos mediante la relación de orden dada en el conjunto de los números reales.

1) **Intervalo cerrado:**

$$[a\ b] = \{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$$

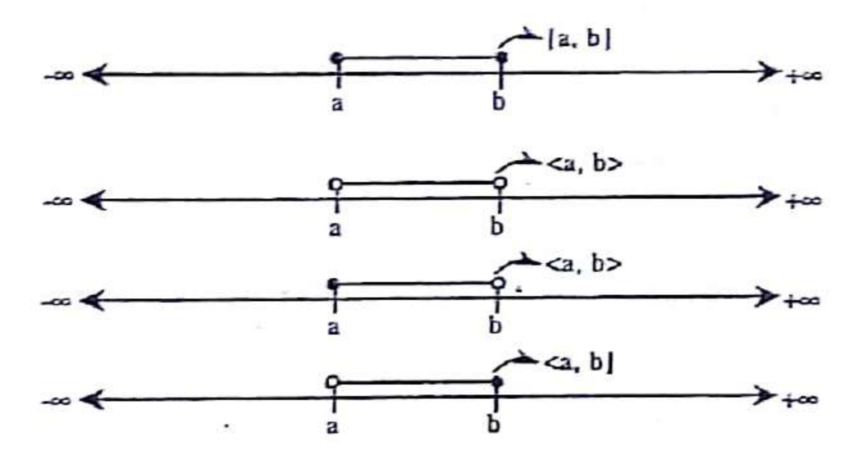
2) **Intervalo abierto:**

$$<a, b> = \{x \in R \ / \ a < x < b\}$$

3) **Intervalos semiabiertos:**

$$[a\ b> = \{x \in R \ / \ a \leq x < b\}$$

$$<a\ b] = \{x \in R \ / \ a < x \leq b\}$$



4) **Intervalos infinitos:**

$$<a, +\infty> = \{x \in R \ / \ x > a\}$$

$$[a, +\infty> = \{x \in R \ / \ x \geq a\}$$

$$<-\infty, b> = \{x \in R \ / \ x < b\}$$

$$<-\infty, b] = \{x \in R \ / \ x \leq b\}$$

<a, +∞>
-∞ a +∞

[a, +∞>
-∞ a +∞

<-∞, b>
-∞ b +∞

<-∞, b]
-∞ b +∞

Observación: $R = <-\infty, +\infty>$ = conjunto de los números reales, además $[a, a] = \{a\}$.

2.2 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

A partir de estos axiomas se demuestra todas las propiedades de las operaciones con números reales, sin embargo, aquí sólo se demostrarán algunas de ellas.

TEOREMA 1

Si a es un número real, entonces $a \cdot 0 = 0$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{A4}\\
&= a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) && \text{A5}\\
&= a(0+0) + (-(a \cdot 0)) && \text{D}\\
&= a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) && \text{A4}\\
&= 0 && \text{A5}
\end{aligned}
$$

TEOREMA 2

Supóngase que a y b son números reales $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$.

Demostración: Si $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$.

Si $b = 0$ no hay nada que demostrar pues en tal caso se cumple la condición que se desea demostrar si $b \neq 0$ entonces por M5 existe b^{-1} en R tal que $bb^{-1} = 1$ de donde:

$$
\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{M4}\\
&= a\,(bb^{-1}) && \text{M5}\\
&= (a\,b)\,b^{-1} && \text{M3}\\
&= 0 \cdot b^{-1} && \text{por hipótesis } ab = 0\\
&= b^{-1} \cdot 0 && \text{M2}\\
&= 0 && \text{por teorema 1}
\end{aligned}
$$

Si $a = 0$ ó $b = 0 \Rightarrow a\,b = 0$ se sigue inmediatamente del teorema 1.

DEFINICIÓN 1 **(Resta)**

$$a - b = a + (-b)$$

DEFINICIÓN 2 **(División)**

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}, \qquad b \neq 0.$$

TEOREMA 3

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \text{ ó } a = -b.$$

Demostración:

$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0$	A5
$\Leftrightarrow (a + b)(a - b) = 0$	D
$\Leftrightarrow a + b = 0 \text{ ó } a - b = 0$	Teorema 2
$\Leftrightarrow a = -b \text{ ó } a = b$	A4 y A5 ■

Estas propiedades pueden ser aplicadas a la solución de ecuaciones como veremos posteriormente.

Otras propiedades de los números reales que pueden ser probados en base a los axiomas se dan a continuación pero sin prueba y se proponen al lector como problemas.

Problema 1: Demostrar que $-0 = 0$

Problema 2: Demostrar que $-a = (-1)\,a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Problema 3: Demostrar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ $a(-b) = -(a\,b) = (-a)b$

Problema 4: Demostrar que para todo $a \in \mathbb{R}$: $-(-a) = a$

Problema 5: Demostrar que para todo $a \in \mathbb{R}$: $(-a)(-b) = ab$

Problema 6: Si $a \neq 0$ demostrar que $a^{-1} \neq 0$.

Problema 7: Si $a \neq 0$ entonces $(a^{-1})^{-1} = a$

Problema 8: Demostrar que $-a - b = -(a + b)$

Ecuación lineal

Estas ecuaciones tienen la forma

$$ax + b = 0, \qquad \text{donde } a, b \in \mathbb{R}$$

Es claro que:

1) Si $a \neq 0 \Rightarrow$ la solución es $x = -\dfrac{b}{a}$

2) Si $a = 0$ y $b \neq 0 \Rightarrow$ la ecuación no tiene solución.

3) Si $a = b = 0 \Rightarrow$ la solución de la ecuación es un número cualquiera, en este caso la ecuación se denomina indeterminada.

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación:

$$5x - 1 = 2x + 8$$

Solución:

Restamos 2x a ambos miembros

$$5x - 1 - 2x = 2x + 8 - (-2x) \Rightarrow 3x - 1 = 8$$

sumando 1 a cada miembro:

$$3x - 1 + 1 = 8 + 1 \Rightarrow 3x = 9$$

dividiendo ambos miembros entre el número 3

$$\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

2.3 DESIGUALDADES LINEALES: PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

DEFINICIÓN 3

1. Un número real a es llamado positivo si $0 < a$.
2. Un número real a es llamado negativo si $a < 0$.
3. La relación > 'mayor' que se define: $a > b \Leftrightarrow b < a$.
4. La relación ≤ 'menor o igual' se define

$$a \leq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$$

5. La relación ≥ 'mayor o igual' se define

$$a \geq b \Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b)$$

6. $a < b < c \equiv (a < b) \wedge (b < c)$
7. $a < b \leq c \equiv (a < b) \wedge (a \leq c)$

TEOREMA 4

Si $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.

Demostración: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ 03

$c < d \Rightarrow b + c < b + d$ 03

De donde: $a + c < b + d$ 02

TEOREMA 5

$$\text{Si} \quad a < b \ \text{ y } \ c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

Demostración:

$a < b \Rightarrow a - a < b - a$	03
$\Rightarrow 0 < b - a$ o sea $b - a > 0$	A5
$c < 0 \Rightarrow (b - a)c < (b - a)0$	04
$\Rightarrow bc - ac < 0$	(D) y teorema 1
$\Rightarrow bc - ac + ac < 0 + ac$	03
$\Rightarrow bc + 0 < 0 + ac$	A5
$\Rightarrow bc < ac$ o sea $ac > bc$	A4

TEOREMA 6

$$\text{Si} \quad a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

Demostración: Si $a \neq 0$ entonces $a > 0$ ó $a < 0$, luego

i) $a > 0 \Rightarrow a . a > a . 0 \Rightarrow a^2 > 0$

ii) $a < 0 \Rightarrow a . a > a . 0 \Rightarrow a^2 > 0$

TEOREMA 7

$$\text{Si} \quad \begin{cases} 0 \leq a < b \\ 0 \leq c < b \end{cases} \Rightarrow ac < bd$$

Esto no ocurre en la división, por ejemplo:

$$\begin{matrix} 5 < 6 \\ 1 < 2 \end{matrix} \ \text{no implica} \ \frac{5}{1} < \frac{6}{2}.$$

TEOREMA 8 **(Regla de los signos)**

i) $ab > 0 \Leftrightarrow$ a y b tienen el mismo signo.

ii) $ab < 0 \Leftrightarrow$ a y b tienen signos opuestos.

EJEMPLO 1

Probar que a^{-1} tiene el mismo signo que a.

Solución:

Como $1 = 1 . 1 = 1^2 > 0$ y $a . a^{-1} = 1 > 0$ entonces a y a^{-1} tienen el mismo signo.

TEOREMA 9

Si a y b tiene el mismo signo y $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$.

Demostración: Sabemos que si $ab > 0 \Rightarrow (ab)^{-1} > 0$

$$\Rightarrow a^{-1}b^{-1} > 0$$

y como $a < b$

$$(a^{-1}b^{-1})a < (a^{-1}b^{-1})b$$

$$(a^{-1}a)b^{-1} < a^{-1}(b^{-1}b)$$

$$1b^{-1} < a^{-1} . 1 \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$$

TEOREMA 10

Si $a > 0$ y $b \geq 0$ entonces $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$.

TEOREMA 11

Si $b \geq 0$ entonces $a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b}$ ó $a < -\sqrt{b}$

TEOREMA 12

Si $b > 0$ entonces $a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

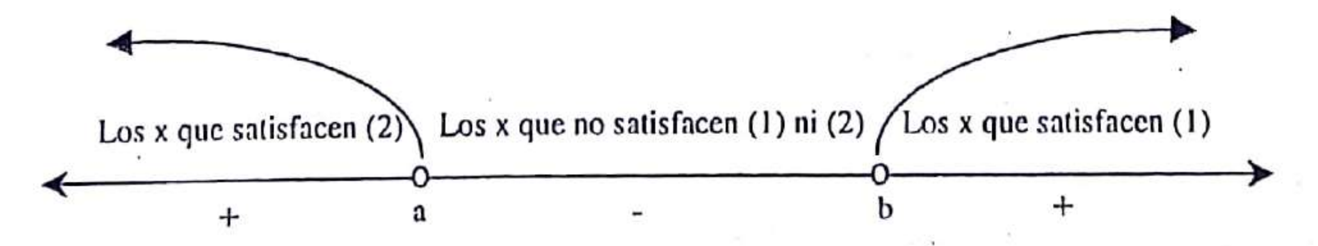
Regla de los signos – Interpretación gráfica

Existe una forma práctica de determinar el conjunto solución de una inecuación del tipo

$$p(x) = (x - a)(x - b) > 0, \text{ donde } a < b$$

por propiedad de los números reales:

$$p(x) = (x-a)(x-b) > 0 \leftrightarrow \begin{cases} x - a > 0 \wedge x - b > 0 \quad (1) \\ \vee \\ x - a < 0 \wedge x - b < 0 \quad (2) \end{cases} \leftrightarrow \{x \in \langle -\infty, a \rangle \cup \langle b, \infty \rangle$$



Regla

1. Los números a y b se ubican en la recta real quedando ésta dividida en tres partes:

   Si $p(x) > 0$ las soluciones son la primera parte (b, ∞) y la tercera parte $(-\infty, a)$, sin los extremos a y b.

   Si $p(x) < 0$ la solución en la segunda parte $\langle a, b \rangle$ si se tiene $p(x) \geq 0$ o $p(x) \leq 0$ las soluciones son análogas sólo que se incluyen los extremos.

2. Si se tiene la inecuación $\dfrac{x-a}{x-b} > 0$, con $a < b$ ($a > b$ es análogo)

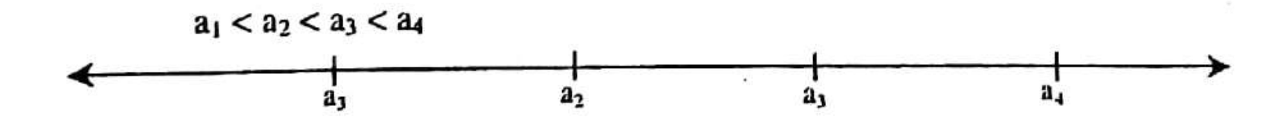
$$\frac{x-a}{x-b} > 0 \leftrightarrow \begin{Bmatrix} x-a>0 \wedge \dfrac{1}{x-b} > 0 \\ \vee \\ x-a<0 \wedge \dfrac{1}{x-b} < 0 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} x-a>0 \wedge x-b>0 \\ \vee \\ x-a<0 \wedge x-b>0 \end{Bmatrix}$$

y estamos en la parte 1)

si $$\frac{x-a}{x-b} \geq 0 \leftrightarrow \begin{cases} x-a \geq 0 \wedge x-b > 0 \\ \vee \\ x-a \leq 0 \wedge x-b < 0 \end{cases} \leftrightarrow x \in \langle -\infty, a] \cup \langle b, \infty \rangle,$$

se incluye $x = a$.

Lo anterior se puede generalizar al caso: $p(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4) > 0$



Regla:

1. Los números a_1, a_2, a_3 y a_4 se ubican en la recta real quedando ésta dividida en cinco partes.

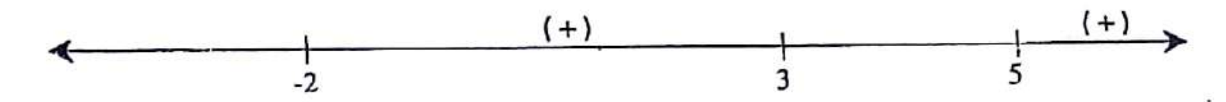
   Si $p(x) > 0$ las soluciones son, contando de derecha a izquierda en forma alternada $\langle a_4, \infty \rangle$, $\langle a_2, a_3 \rangle$ y $\langle -\infty, a_1 \rangle$.

   Si $p(x) < 0$ las soluciones son $\langle a_3, a_4 \rangle$ y $\langle a_1, a_2 \rangle$.

   Si $p(x) \geq 0$ o $p(x) \leq 0$ en las soluciones anteriores incluimos los extremos.

EJEMPLO 2

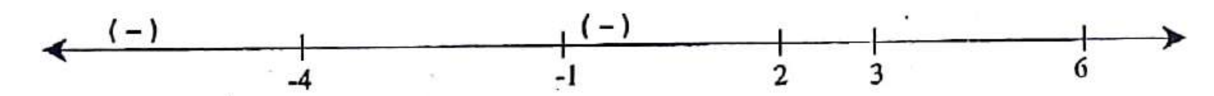
Resolver $(x + 2)(x - 3)(x - 5) > 0$, se consideran los números -2, 3 y 5 en la recta.



el conjunto solución es $\langle -2, 3\rangle \cup \langle 5, \infty\rangle$.

EJEMPLO 3

Resolver $\dfrac{(x-3)(x+4)(x-6)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$, los números $-4, -1, 2, 3$ y 6 se ubican en la recta,



el conjunto solución es:

$$\langle -\infty, -4] \cup \langle -1, 2\rangle \cup [3, 6],$$

donde se nota que no se incluyen -1 y 2.

EJEMPLO 4

Resolver: $\dfrac{ax + b}{a + bx} < 1$ donde $a>b>0$. Dar el conjunto solución.

Solución:

$$\frac{ax + b}{bx + a} - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{ax + b - bx - a}{bx + a} < 0$$

$$\frac{(a-b)x - (a-b)}{bx + a} < 0$$

$$\frac{(x-1)(a-b)}{bx + a} < 0$$

pero $a - b > 0$ $\qquad \dfrac{(x-1)}{(bx + a)} < 0$

$$\frac{x - 1}{x + a/b} < 0$$

Así el conjunto solución es: $\langle -a/b, 1\rangle$.

EJEMPLO 5

Un atleta va a participar en una maratón y desea saber que distancia es la que va recorrer para poder programar sus entrenamientos. Le informan que cuando haya recorrido 12 cm., le falta recorrer menos de los 3/5 de la longitud total; y si recorre 16cm la distancia que le falta recorren es mayor a 1/5 de la longitud total. Hallar la longitud, sabiendo que esta es el mayor entero posible.

Solución:

Sea L longitud total

$$L - 12 < \frac{3}{5}L \rightarrow L < 30$$

$$L - 16 > \frac{1}{5}L \rightarrow L > 20 \rightarrow L \in \langle 20,30 \rangle$$

Como L es entero, entonces: $L = 29$

2.4 VALOR ABSOLUTO

DEFINICIÓN 4

El valor absoluto de un número real a se denota por $|a|$ y se define así

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 1

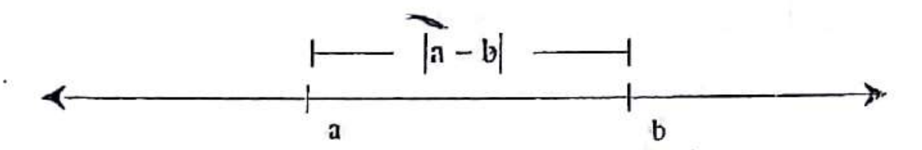
$$|2| = 2, \quad \left|-\sqrt{5}\right| = -\left(-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}\ ; \qquad \left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 2

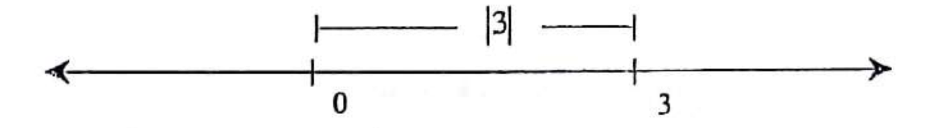
$$|3x-1| = \begin{cases} 3x-1, & \text{si } 3x-1 \geq 0 \\ -(3x-1), & \text{si } 3x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x-1, & \text{si } x \geq \frac{1}{3} \\ 1-3x, & \text{si } x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Interpretación Geométrica:

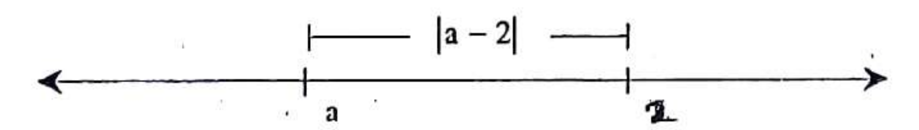
Geométricamente el valor absoluto de la diferencia de dos números a y b denotado $|a-b|$ es la distancia que hay entre ellos en la recta numérica.



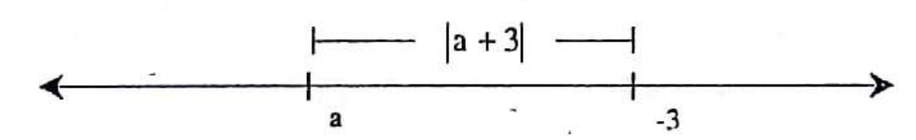
- $|3| = |3-0|$ es la distancia entre los puntos que corresponden al 3 y al origen (cero) en la recta numérica.



- $|a-2|$ denota la distancia de a al 2 en la recta numérica.



- $|a+3| = |a-(-3)|$ es la distancia de a a – 3 en la recta numérica



- $|3a-1| = \left|3\left(a-\frac{1}{3}\right)\right| = 3\left|a-\frac{1}{3}\right|$ es el triple de la distancia del número a al número $\frac{1}{3}$ o la distancia del número 3a al número 1.

TEOREMA 13

1) $|a| \geq 0$ 2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Demostración:

1) Hay dos vasos

a) $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \geq 0$

b) $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0$

2) $\Leftarrow$) Si $a = 0$ entonces $|a| = |0| = 0$

$\Rightarrow$) Hipótesis $|a| = 0$ probaremos que $a = 0$. Si $a \neq 0$ entonces $a > 0$ ó $a < 0$ luego

a) Si $a > 0$: $|a| = a > 0 \Rightarrow |a| > 0$ absurdo pues por hipótesis $|a| = 0$.

b) Si $a < 0$: $|a| = -a > 0 \Rightarrow |a| > 0$ absurdo pues por hipótesis $|a| = 0$ luego $a \neq 0$ no es posible y por lo tanto se cumple $a = 0$.

EJEMPLO 3

Resolver las ecuaciones:

1) $|2x - 10| = 0$

2) $|x^2 + 5x + 6| = 0$

Solución:

1) $|2x - 10| = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

2) $|x^2 + 5x + 6| = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$

TEOREMA 14

1) $|a| = |-a|$ 2) $a \leq |a|$ y $-a \leq |a|$

Demostración:

1) Hay dos casos

i) $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a = -(-a) = |-a|$

ii) $a < 0 \Rightarrow |a| = -a = |-a|$

2) Hay dos casos en los cuales se aplica el teorema anterior y la primera parte

i) $a \geq 0 \Rightarrow a = |a|$ y $-a \leq 0 \leq |a|$

DEFINICIÓN 5

Supóngase que $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$.

EJEMPLO 4

$\sqrt{16} = 4$ porque $16 = 4^2$

$\sqrt{0} = 0$ porque $0 = 0^2$

TEOREMA 15

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ para todo } a \in R.$$

Demostración: Supóngase $\sqrt{a^2} = b \geq 0$ entonces

$$\sqrt{a^2} = b \Leftrightarrow b^2 = a^2 \Leftrightarrow b = a \quad o \quad b = -a$$

$$\Leftrightarrow b = |a|.$$

Observación: Si se cumpliese que $\sqrt{a^2} = a$, sin el valor absoluto, se cometerían muchos errores como en

$$\sqrt{9} = \sqrt{(-3)^2} = -3 \text{ absurdo}$$

además se tiene que para todo $a \in R$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \text{ n entero, } n \geq 1$$

Observación: Si asumimos que $\sqrt{a^2} = a$, llegaríamos a la siguiente ambigüedad; $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ y $\sqrt{9} = \sqrt{(-3)^2} = -3$.

TEOREMA 16

1) $|a\,b| = |a|\,|b|$

2) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

3) $|a^n| = |a|^n$, n entero.

Demostración:

1) $|a\,b| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a|\,|b|$.

2) y 3) se dejan como ejercicio para el lector.

TEOREMA 17 **(Desigualdad Triangular)**

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración:

i) $a \leq |a|$ y $b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$

ii) $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b| \Rightarrow -(a + b) \leq |a| + |b|$ de donde $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Corolario 1: $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$.

Demostración: Ejercicio para el lector.

2.5 ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

El siguiente teorema es utilizado en la solución de ecuaciones con valor absoluto.

TEOREMA 18

$$|a| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge [a = b \vee a = -b]$$

Observación: Este teorema establece que el universo U (es decir el campo de valores admisibles) de la ecuación $|a| = b$ esta determinado por la condición $b \geq 0$, la cual debe ser resuelta previamente, una vez hallado este universo U se pasa a resolver las dos ecuaciones $a = b$ y $a = -b$, finalmente se comprueba si estas soluciones se hallan dentro del universo U.

EJEMPLO 1 Resolver $|x| = 4$.

Solución:

En este caso obviamente se cumple que $b = 4 \geq 0$ entonces el universo U es todo R, dentro del cual se resuelve la ecuación

$$|x| = 4 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ó } x = -4$$

así, el conjunto solución es C.S. $= U \cap \{4, -4\}$

$$= R \cap \{4, -4\}$$

$$= \{4, -4\}$$

EJEMPLO 2 Resolver: $|x - 1| = -3x$

Solución:

$$|x - 1| = -3x \Leftrightarrow -3x \geq 0 \text{ y } [x - 1 = -3x \text{ ó } x - 1 = -(-3x)]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq 0 \text{ y } [4x = 1 \text{ ó } x - 1 = 3x]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq 0 \text{ y } [x = 1/4 \text{ ó } x = -1/2]$$

el conjunto solución es C.S. $= \langle -\infty, 0] \cap \left\{\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right\} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, luego la ecuación tiene una sola solución $x = -1/2$

EJEMPLO 3

Resolver la ecuación $|x+1|+|x-1|=6$.

Solución:
Particionamos la recta real en base a los 'puntos críticos' donde se anulan los valores absolutos

$$R = \underbrace{\langle -\infty,-1\rangle}_{U_1} \cup \underbrace{[-1,\ 1\rangle}_{U_2} \cup \underbrace{[1,+\infty\rangle}_{U_3}$$

resolvemos la ecuación dentro de cada uno de estos universos parciales y al final reuniremos todas estas soluciones parciales.

a) Si $x \in U_1 = \langle -\infty,-1\rangle$: $x < -1 \Rightarrow x+1 < 0$ y $x-1 < -2 < 0$.

Entonces: $|x+1|+|x-1|=6$

$\Leftrightarrow \quad -(x+1)-(x-1)=6$

$\Leftrightarrow \quad x=-3$, es una solución válida pues $-3 \in U_1$

b) Si $x \in U_2 = [-1,1\rangle$: $-1 \le x < 1 \Rightarrow x+1 \ge 0$ y $x-1 < 0$.

Entonces: $|x+1|+|x-1|=6$

$\Leftrightarrow \quad x+1-(x-1)=6$

$\Leftrightarrow \quad 2=6$ absurdo, no existe solución en U_2.

c) Si $x \in U_3 = [1,+\infty\rangle$: $x \ge 1 \Rightarrow x+1 \ge 0$ y $x-1 \ge 0$.

Entonces: $|x+1|+|x-1|=6$

$\Leftrightarrow \quad x+1-x-1=6$

$\Leftrightarrow \quad x=3$, es una solución válida pues $3 \in U_3$.

Así, resumiendo todas estas soluciones parciales

$$C.S. = \{3,-3\}$$

EJEMPLO 4

Resolver $(x-3)^2-8\ |x-3|+15=0$

Solución:

La ecuación es equivalente a

$$|x-3|^2-8|x-3|+15=0 \Leftrightarrow (|x-3|-5)(|x-3|-3)=0$$

$$\Leftrightarrow |x-3|=5 \ \text{ó} \ |x-3|=3$$

$$\Leftrightarrow [x-3=5 \ \text{ó} \ x-3=-5] \ \text{ó} \ [x-3=3 \ \text{ó} \ x-3=-3]$$

$$\Leftrightarrow [x=8 \ \text{ó} \ x=-2] \ \text{ó} \ [x=6 \ \text{ó} \ x=0]$$

luego el conjunto solución resulta: $\qquad C.S. = \{-2, 0, 6, 8\}$

TEOREMA 19

Dados a, b ∈ R

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \quad o \quad a = -b$$

EJEMPLO 5 Resolver la ecuación $|x^2 - 4x| = |2x - 8|$.

Solución:

La ecuación es equivalente a

$$x^2 - 4x = 2x - 8 \quad ó \quad x^2 - 4x = -(2x - 8)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \quad ó \quad x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0 \quad ó \quad (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \quad ó \quad x = 2) \quad ó \quad (x = 4 \quad ó \quad x = -2)$$

Luego al conjunto solución es: $C.S. = \{4, 2, -2\}$

2.6 INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

La solución de inecuaciones con valor absoluto se basa en los siguientes teoremas.

TEOREMA 20

Sean x, a ∈ R entonces

1) $|x| \leq a \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge -a \leq x \leq a]$

2) $|x| < a \Leftrightarrow [a > 0 \wedge -a < x < a]$

3) $|x| \geq a \Leftrightarrow [x \geq a \vee x \leq -a]$

4) $|x| > a \Leftrightarrow [x > a \vee x < -a]$

TEOREMA 21

Dados a, b ∈ R

1) $|a| \leq |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) \leq 0$

2) $|a| < |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) < 0$

3) $|a| \geq |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) \geq 0$

EJEMPLO 6

Resolver $|2x-3|\leq 1$

Solución:

$$|2x-3|\leq 1 \Leftrightarrow [1\geq 0 \wedge -1\leq 2x-3\leq 1]$$

$$\Leftrightarrow [1\geq 0 \wedge 1\leq x\leq 2]$$

$$\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$$

el conjunto solución C.S. = [-1 2]

EJEMPLO 7 Resolver $|3x+7|\leq -4x$

Solución:

$$|3x+7|\leq -4x \Leftrightarrow [-4x\geq 0 \wedge -(-4x)\leq 3x+7\leq -4x]$$

$$\Leftrightarrow [x\leq 0 \wedge (4x\leq 3x+7 \wedge 3x+7\leq -4x)]$$

$$\Leftrightarrow [x\leq 0 \wedge (x\leq 7 \wedge x\leq -1)]$$

$\Leftrightarrow x\leq -1$, el conjunto solución es C.S. = $\langle -\infty,-1]$.

EJEMPLO 8

Resolver $|9-x^2|\geq 7$

Solución:

$$|9-x^2|\geq 7 \Leftrightarrow 9-x^2\geq 7 \vee 9-x^2\leq -7$$

$$\Leftrightarrow 2\geq x^2 \vee 16\leq x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\geq |x| \vee 4\leq |x|$$

$$\Leftrightarrow |x|\leq \sqrt{2} \vee |x|\geq 4$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{2} \vee (x\geq 4 \text{ ó } x\leq -4)$$

$$\Leftrightarrow x\in \langle -\infty,-4]\cup[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cup[4,+\infty\rangle$$

EJEMPLO 9 Resolver $|x+1|-|3x+7|\geq 0$.

Solución:

$$|x+1|-|3x+7|\geq 0 \Leftrightarrow |x+1|\geq |3x+7|$$

$$\Leftrightarrow ((x+1)+(3x+7))((x+1)-(3x+7))\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4x+8)(-2x-6)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4x+8)(2x+6)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in [-3,-2]$$

2.7 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

En R conjunto de los números reales, definimos la operación a # b = a + b – 3. Determine la validez de las siguientes proposiciones:

I) # es conmutativa

II) # tiene un elemento neutro

III) En esta operación el inverso de 4 es –4.

Solución:

I) $a \# b = a + b - 3,\ b \# a = b + a - 3 \rightarrow a \# b = b \# a$ (V)

II) $a \# e = a \rightarrow a + e - 3 = a \rightarrow e = 3$ (V)

III) $4 \# I = 3 \rightarrow 4 + I - 3 = 3 \rightarrow I = 2$ (F)

PROBLEMA 2

Si $A = \left\{ y \in R \,/\, y = \dfrac{x+1}{x+2},\ \ x \in [4,0] \right\} = [m;n]$. Hallar m + n.

Solución:

$$y = 1 - \frac{1}{x+2} \rightarrow \quad 4 \le x \le 6$$

$$6 \le x + 2 \le 8$$

$$\frac{1}{6} \ge \frac{1}{x+2} \ge \frac{1}{8}$$

$$-\frac{1}{6} \le -\frac{1}{x+2} \le \frac{1}{8}$$

$$\frac{5}{6} \le 1 - \frac{1}{x+2} \le \frac{7}{8}$$

$$\frac{5}{6} \le y \le \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow m + n = \frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{20+21}{24} = \frac{41}{24}$$

PROBLEMA 3

Hallar el menor número real M tal que:

$$6 + 6x - x^2 \leq M, \text{ para todo } x \in R$$

Solución:

$6 + 6x - x^2 = 15 - (x-3)^2 \leq 15$ para todo x real (pues $-(x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$ para todo x real). Luego M = 15.

PROBLEMA 4

Hallar el conjunto solución de: $\dfrac{(x+1)^{11}(x+3)^{22}}{(x-2)^{84}} < 0$.

Solución:

$\dfrac{(x+1)^{11}(x+3)^{22}}{(x-2)^{84}} < 0 \Leftrightarrow (x+1)^{11} < 0 \wedge x \neq -3, 2$, pues $\dfrac{(x+3)^{22}}{(x-2)^{84}} > 0\ \forall x \neq -3, 2 \Leftrightarrow$

$$(x+1)(x+1)^{10} < 0 \wedge x \neq -3, 2$$

$$\Leftrightarrow (x+1) < 0 \wedge 2 \neq -3, 2, -1$$

$$\Leftrightarrow x < -1 \text{ y } x \neq -3, 2, -1$$

El conjunto solución es $\langle -\infty, 1\rangle - \{-3, 2, -1\} = \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle -3, -1\rangle$.

PROBLEMA 5

Si $\{x \in R \,/\, x \in \langle 0,1\rangle\} \cup \langle 2, 5\rangle \leftrightarrow (x < 0 \vee x > 1) = \{a\} \cup \langle b+c\rangle \cup \{d\}$. Hallar a + b + c + d.

Solución:

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim(p \vee q))$

$p : x \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, 5\rangle$; $\quad q: x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$

$p \wedge q : x \in \langle 2, 5\rangle$

$p \vee q = x \in (R - \{0, 1\})$

$p \leftrightarrow q \equiv p \wedge q \vee \sim (p \vee q)$:

$x \in \langle 2, 5\rangle \cup \{0, 1\}$

$\Rightarrow a + b + c + d = 0 + 2 + 5 + 1 = 8$

PROBLEMA 6

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) si $x(x-1) < 0$, entonces $x \leq 10$

II) $a^3 \geq a, \ \forall a \in R$

III) Si $a < b \wedge c > 0 \rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Solución:

I) $x \in <0, 1> \rightarrow x \in <-\infty, 10>$, propiedad de la inclusión (V)

II) $a = 1/2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \geq \frac{1}{2}$ (F)

III) $a < b \wedge c > 0 \rightarrow a < b \wedge \frac{1}{2} > 0 \rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ (V)

PROBLEMA 7

Se definen los conjuntos:

$A = \{x \in Z_0^+ / -11 \leq 2x - 5 < 9\}$ Z_0^+ conjunto de los enteros no negativos.

$B = \{x \in A / x^2 - 2x \notin A\}$, hallar la suma de elementos de B.

Solución:

$A : -11 < 2x - 5 < 9 \leftrightarrow -3 < x < 7 \wedge x \in Z_0^+$

$\Rightarrow A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B : x = 0 \rightarrow 0^2 - 2(0) = 0 \in A$ $\qquad x = 4 \rightarrow 4^2 - 2(4) = 8 \notin A$

$x = 1 \rightarrow 1^2 - 2(1) = -1 \notin A$ $\qquad x = 5, \rightarrow 5^2 - 2(5) = 15 \notin A$

$x = 2 \rightarrow 2^2 - 2(2) = 0 \in A$ $\qquad x = 6, \rightarrow 6^2 - 2(6) = 24 \notin A$

$x = 3 \rightarrow 3^2 - 2(3) = 3 \in A$

$\Rightarrow b = \{1, 4, 5, 6\}$

Suma de elementos: $1 + 4 + 5 + 6 = 16$

PROBLEMA 8

Hallar el conjunto solución de $\sqrt{x} < \sqrt{\dfrac{16-x}{x-1}}$

Solución:

$$0 \le x \le \frac{16-x}{x-1} \leftrightarrow x \ge 0 \wedge \frac{16-x}{x-1} \ge 0 \wedge x \le \frac{16-x}{x-1}$$

$$\leftrightarrow (x \ge 0 \wedge x \in <1,16]) \wedge 0 \le \frac{16-x}{x-1} - x$$

$$\leftrightarrow (x \in <1,\ 16]) \wedge \left(0 \le \frac{16-x^2}{x-1}\right)$$

$$\leftrightarrow (x \in <1,16]) \wedge \left(0 \ge \frac{x^2-16}{x-1} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-1}\right)$$

$$\leftrightarrow (x \in <1,16]) \wedge (x \in <-\infty,-4] \cup <1,4])$$

$$\leftrightarrow x \in <1,4].$$

PROBLEMA 9

Determinar la solución de: $\dfrac{|2x+3|-|x-8|}{|2x-1|-|7x-8|} \ge 0$

Solución:

Como $\dfrac{|2x+3|+|x-8|}{|2x-1|+|7x-8|} > 0, \ \forall\ x \in R$ (¿Porqué?)

$$\frac{|2x+3|-|x-8|}{|2x-1|-|7x-8|} \times \frac{|2x+3|+|x-8|}{|2x-1|+|7x-8|} \ge 0$$

$$\frac{(2x+3)^2-(x-8)^2}{(2x-1)^2-(7x-8)^2} \ge 0$$

$$\frac{(x+11)(3x-5)}{(9x-9)(-5x+7)} \ge 0 \leftrightarrow \frac{(x+11)(3x-5)}{9(x-1)(5x-7)} \le 0$$

$$x \in [-11,1\rangle \cup \langle 7/5,\ 5/3]$$

PROBLEMA 10

Resolver: $|3x-1| \leq |x|$

Solución:

$$|3x-1| \leq |x| \leftrightarrow (3x-1)^2 \leq x^2 \leftrightarrow (3x-1)^2-(x)^2 \leq 0$$

$$(2x-1)(4x-1) \leq 0$$

$$x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

2.8 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Dados los conjuntos de números reales:

$S = \{p \in R \,/\, 2p+3 < 6-p\}$

$T = \{q \in R \,/\, |aq+b| < |a+b-aq|, \text{-}2b < a < 0\}$

Entonces $S \cap T$ es:

A) R B) <0, 1> C) <0, 1/2> D) <-∞, 1> E) <1/2, 1>

PROBLEMA 2

Si $|x-2| \leq a$ y $0 \leq a \leq 1$, hallar el menor número m (m > 0) tal que $|x^2-4| \leq m$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA 3

Si $a \in R$ y $\sqrt{|3-a|-2a} \notin R$, decir qué proposición es verdadera

I) $a^{-1} < a$ II) $a + a^{-1} < 2$ III) $5a + 10 > 9a + 6$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) I y II E) II y III

PROBLEMA 4

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $-a < b < 0 \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

II) $a^2 \geq -a \ \ \forall a \in R$

III) $a < 0 < -b \Rightarrow ab > 0$

A) VFF B) FVV C) VVF D) VFV E) VVV

PROBLEMA 5

Hallar el conjunto A

$$A = \{x \,/\, \left||x-1|+8\right| \geq \left||6-6x|+3\right|\}$$

A) [0, 2] B) [-2, 2] C) [0, 3] D) [0, 4] E) <-∞, 4]

PROBLEMA 6

El conjunto solución de:

$$\left|\frac{3|x|+1}{x-2}\right| \leq \frac{3x}{|x|} \text{ es } S = \langle a, b],$$

dar el valor de 30a + 12b.

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

PROBLEMA 7

Sean a, b ∈ R números fijos, tales que $a < 0$, $b > 1$ y $a + b < 2$ al resolver para x

$|x-a|+|x-1| = b-x$, se obtienen

A) 2 soluciones B) 3 soluciones C) 1 solución

D) ninguna solución E) Infinitas soluciones

PROBLEMA 8

Hallar el conjunto solución de: $\dfrac{(x+1)^{13}(x+3)^{20}}{(x-2)^{40}} < 0$

A) <-∞, -3> ∪ <-3, -1> B) <-∞, -1> ∪ <2, 3> C) <-∞, -3>

D) <-∞, -2> ∪ <1, 2> E) <∞, -1> ∪ <0, 1>

PROBLEMA 9

Al resolver $\dfrac{x(x-10)}{(1-2x)^7} \geq 0$ se obtiene por conjunto solución el conjunto solución

$<-\infty, a] \cup <b, c]$, entonces el valor de abc es:

A) 0　　B) 1　　C) 2　　D) 3　　E) –1

PROBLEMA 10

Hallar el conjunto solución de $|x+6| > |x+9| + |x-2|$

A) ϕ　　B) R　　C) <0, 1>　　D) [0, 1]　　E) [2, 3>

PROBLEMA 11

Hallar el conjunto solución de $||x-3|+3| > -2$

A) ϕ　　B) R　　C) <0, +∞>　　D) <-∞, 0>　　E) R – {0}

PROBLEMA 12

Si
$A = \{x \in R / 2 - |2x+3| \leq 3\}$

$B = \{x \in R / 2 - |x-2| \leq 0\}$

Hallar B – A.

A) <-∞, -3>　　B) [4, +∞>　　C) <-∞, -3> ∪ < [4, +∞>　　D) R　　E) ϕ

PROBLEMA 13

Si $A = \left\{ x \in R / \dfrac{5}{|2x-1|} \geq \dfrac{1}{|x-2|} \right\}$, hallar A^C.

A) {1/2} ∪ <11/7, 3>　　B) <11/7, 3>　　C) <0, 1>　　D) R　　E) ϕ

PROBLEMA 14

Hallar el menor de los números M tales que: $\left|\dfrac{x-9}{x-6}\right| \leq M$, si $x \in [2, 5]$

A) 4　　B) 5　　C) 6　　D) 8　　E) 10

PROBLEMA 15

Si $A = \{x \in R \,/\, |3x - 1| = 2x + 5\}$

$B = \{x \in R \,/\, |x + 2| + 6 = 3x\}$,

hallar la suma de los elementos de $A \cup B$.

A) 46 B) 46/5 C) 46/6 D) 46/7 E) 46/8

2.9 TEST DE AUTOEVALUACION

PROBLEMA 1

Se define en R la operación binaria $*$: $a * b = a + b + 3ab$. Dar el valor de verdad:

I) $a * b = b * a$

II) Si $a * x = a \ \forall a \in R$, entonces $x = 0$

III) Si $1 * y = 0 \Rightarrow y = -1$.

A) 1 B) –1 C) 2 D) –2 E) 0

PROBLEMA 2

Si a, b, c, $x \in R$, donde R es el conjunto de los números reales, tal que: x es el elemento inverso aditivo de $(a + b)$; entonces el valor de $bx + 1$ es:

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 0

PROBLEMA 3

Si $\{x \in R \,/\, x \in <0, 1> \cup <2,5> \rightarrow (x < 0 \vee x > 1)\}^C = <a, b>$, entonces el valor de $2a + 3b$.

A) -3 B) -2 C) 1 D) 3 E) 6

PROBLEMA 4

Encontrar el conjunto solución de:

$$\frac{x - b}{x - a} < \frac{a}{b} \qquad \text{si } 0 < a < b$$

A) $<a,b>$ B) $<b,a+b>$ C) $<9,a+b>$ D) $<a-b, a+b>$ E) $<0,b>$

PROBLEMA 5

Expresar en términos de intervalos el conjunto: $A = \left\{ \dfrac{x-2}{1+|x-2|} \;/\; x \in R \right\}$

A) [−1 , 1] B) <−1, 1> C) [−1, 1> D) <−1, 1] E) <1, 2>

PROBLEMA 6

Determinar el menos valor M tal que, para todo $x \in [-\frac{1}{4}, 2]$, se cumpla la desigualdad

$$\left| \frac{1}{|x-1|+3} - \frac{1}{4} \right| \leq M$$

A) 1/12 B) 1/6 C) 5/6 D) 7/8 E) 9/10

PROBLEMA 7

Hallar el conjunto solución de: $\sqrt{2x+3} < x$.

A) <0,+∞> B) [-3/2,+∞> C) <-3,+∞> D) <3,+∞> E) <-3,3>

PROBLEMA 8

Sea $A = \{x \in [-10,20] / 30 - |x| \in [-15,20]\}$. Determinar el número de elementos del conjunto $A \cap Z$.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

PROBLEMA 9

Hallar el número de elementos del siguiente conjunto: $\{x \in Z / |2x - 3| < |x + 6|\}$

A) 7 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

PROBLEMA 10

Decir el valor de verdad

I) Si $|a| > b$ entonces $a \geq b \vee a \leq -b$

II) El conjunto solución de: $|x-2|(x-1)(x-4) < 0$ es $<1,4>$

III) $|x| + x \geq 0 \quad \forall \in R$

A) VVV B) FVV C) VFV D) VFF E) FFF

2.10 CLAVE DE RESPUESTAS

Problemas propuestos:

1) E	6) A	11) B
2) E	7) A	12) C
3) A	8) A	13) A
4) D	9) A	14) A
5) A	10) A	15) B

Test de autoevaluación:

1) B	6) A
2) E	7) D
3) D	8) B
4) C	9) B
5) B	10) C

CAPÍTULO 3

ECUACIONES E INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

3.0 OBJETIVOS:

El presente capitulo tiene como objetivos:

- Aprender la forma de resolución de una ecuación cuadrática.
- Generalizar el concepto a formas polinómicas cuadráticas y su representación grafica en el plano cartesiano.
- Conocer e interpretar las variantes graficas de los polinomios cuadráticos.
- Conocer aplicaciones en los diversos campos de la ingenieria que involucran formas cuadráticas.
- Conocer otras ecuaciones que puedan resolverse por reducción a ecuaciones cuadráticas.
- Generalizar el concepto a desigualdades que involucran formas cuadráticas.

3.1 ECUACIÓN CUADRÁTICA O DE 2DO. GRADO

Forma General: $ax^2 + bx + c = 0$; a, b, c $\in \Re$, $a \neq 0$

La ecuación será incompleta si $b = 0$ $\vee$ $c = 0$ es decir :

$$ax^2 + c = 0 \quad \vee \quad ax^2 + bx = 0$$

3.2 RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

a) **Por factorización.**- Se basa en la propiedad

$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad b = 0$

EJEMPLO 1

Resolver : $6x^2 - 13x + 6 = 0$

Solución: Por el método del aspa simple:

$$6x^2 - 13x + 6 = 0$$

$3x \quad -2$

$2x \quad -3$

$$(3x-2)(2x-3)=0 \iff 3x-2=0 \iff x=\frac{2}{3}$$

$$\vee$$

$$\iff 2x-3=0 \iff x=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{ C. S.} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$$

b) **Por formula general.**- Se basa en la propiedad:

$$a^2 = b \iff a=\sqrt{b} \quad \vee \quad a=-\sqrt{b}$$

Dada $ax^2+bx+c=0; \iff x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

Completando cuadrados: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$

Signo del termino lineal

Cuadrado de $\frac{b}{2a}$

$\frac{1}{2}$ Del coeficiente lineal

$$\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \text{Si} \quad b^2-4ac \geq 0 \quad \wedge \quad a>0$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\iff x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Luego $\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ Solución general de la Ecuación cuadrática.

3.3. PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación cuadrática.

Suma de raíces: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

Producto de las raíces: $x_1.x_2=\frac{c}{a}$

Diferencia de las raíces: $(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

3.4 DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES

Los tipos de soluciones dependen de la cantidad subradical, que se denomina discriminante o invariante característica.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Primer caso: si $\Delta > 0$, se obtienen dos raíces reales y diferentes. Donde:

a) Si $c > 0$, las dos raíces serán ambas:
- Positivas si $b < 0$
- Negativas si $b > 0$

b) Si $c < 0$, las raíces tienen signos diferentes, siendo la raíz de mayor valor absoluto:
- Positivas si $b > 0$
- Negativas si $b < 0$

Segundo caso: Si $\Delta = 0$, se obtienen dos raíces reales iguales, donde :

a) Si $b > 0$, las raíces serán ambas negativas

b) Si $b < 0$, las raíces serán ambas positivas

Tercer caso: Si $\Delta < 0$, se obtienen dos raíces complejas, siempre que los coeficientes sean reales.

EJEMPLO 1

Resolver: $x^2 + 6x + 6 = 0$

Solución: Completando cuadrados:

$$(x+3)^2 - 9 + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 3 = \sqrt{3} \quad \vee \quad x + 3 = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -3 + \sqrt{3} \quad \vee \quad x = -3 - \sqrt{3}$$

$$C.S. = \{-3,+\sqrt{3}, \ -3-\sqrt{3},\}$$

3.5 FORMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE 2DO. GRADO

Sean x_1, x_2 las raíces de la Ecuación Cuadrática.

La ecuación será: $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

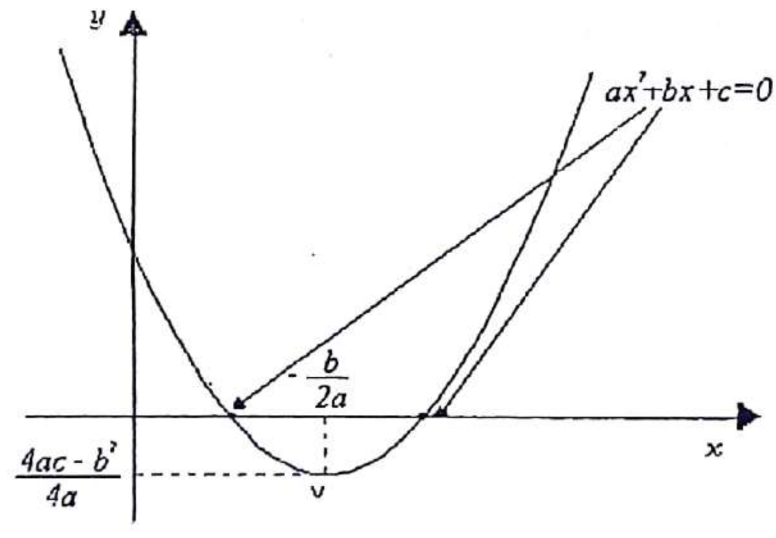
O también: $x^2-\left(\sum \text{raices}\right)x+\prod \text{raices}=0$

3.6 GRAFICA DE POLINOMIOS CUADRÁTICOS

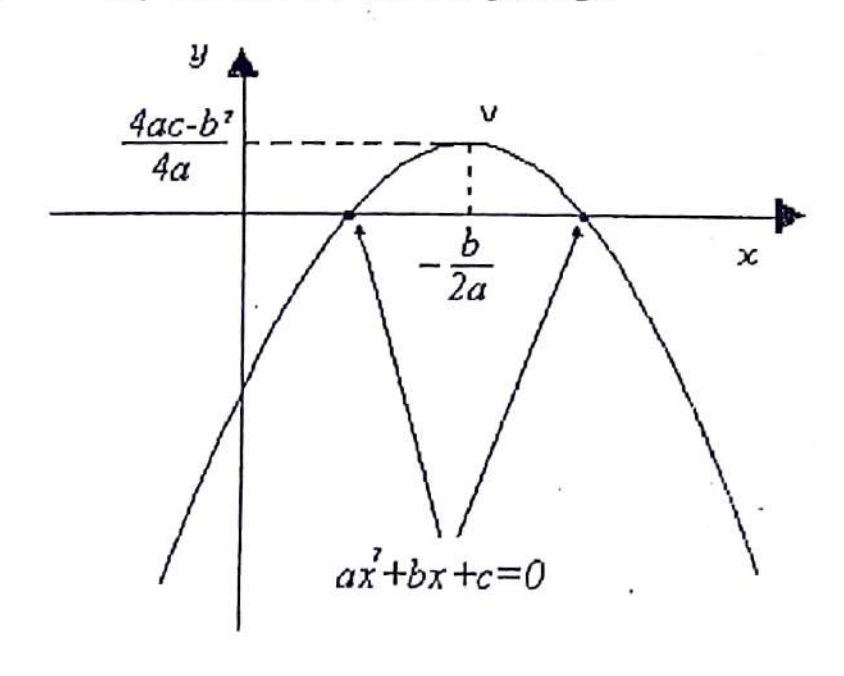
Sea $y=P(x)=ax^2+bx+c$ una función polinomial de 2do. Grado. La representación grafica de este polinomio en el plano cartesiano se denomina parábola.

Sea $y=ax^2+bx+c$, donde el vértice es: $V=\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

Si $\Delta>0$, $a>0$ la parábola se abre hacia arriba, luego:



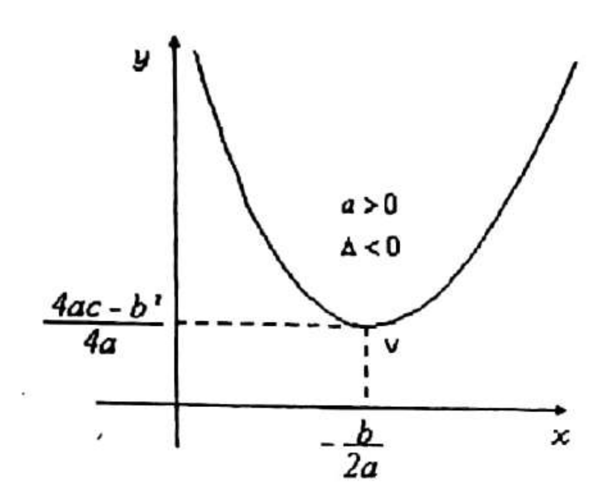
Si $\Delta>0$, $a<0$ la parábola se abre hacia abajo, luego:

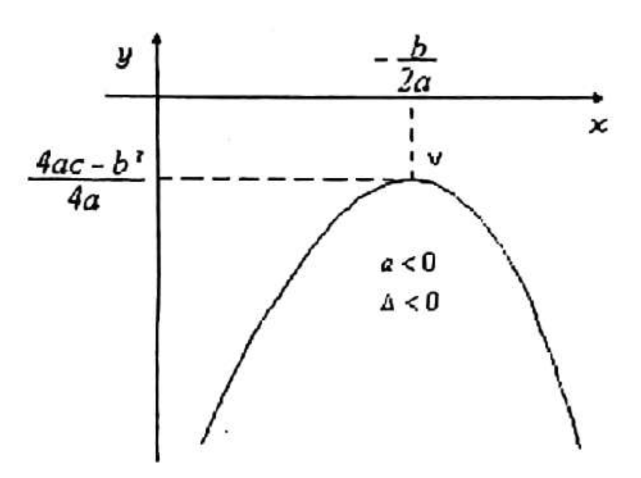


Si $\Delta < 0$ no existen raíces reales de la ecuación , $ax^2 + bx + c = 0$, luego:

a) Si $a > 0 \wedge \Delta < 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \Re$

b) Si $a < 0 \wedge \Delta < 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \Re$

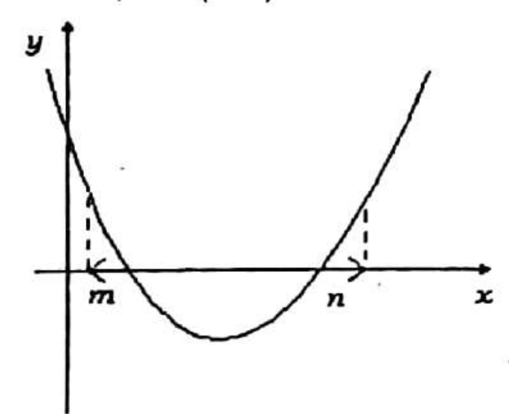




3.7 GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA O DE SEGUNDO GRADO

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

Caso 1.- Si las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. se encuentran en el intervalo $\langle m, n \rangle$, con $m < n$.

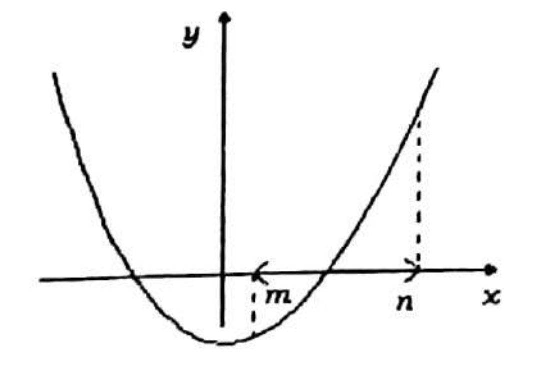


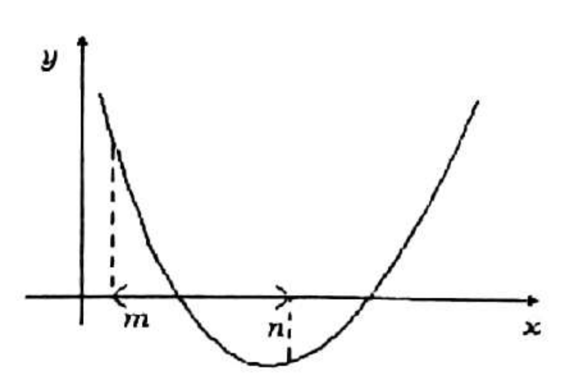
Condiciones:

$\Delta > 0 \wedge af(m) > 0 \wedge af(n) > 0 \wedge m < -\frac{b}{2a}$

$\wedge \; n > -\frac{b}{2a}$

Caso 2.- Una raíz de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, se encuentra en el intervalo $\langle m, n \rangle$.

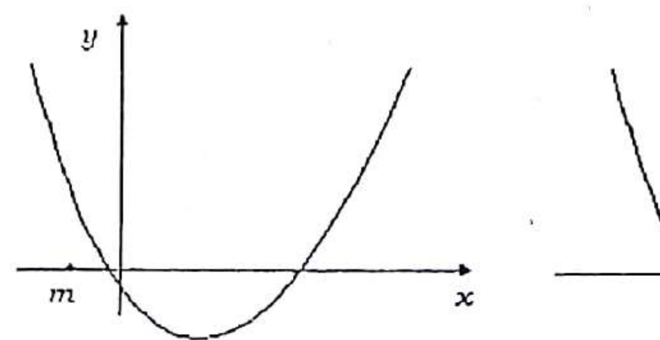


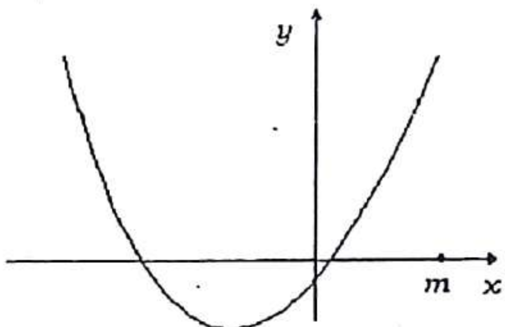


Condiciones:

$$\Delta > 0 \ \wedge \ f(m)f(n) < 0$$

Caso 3.- Las raíces deben ser mayores o menores que un numero dado m





Condición:

$$\Delta > 0 \ \wedge \ \ a\ f(m) > 0 \wedge \left[m < -\frac{b}{2a} \ \vee \ m > -\frac{b}{2a} \right]$$

RESUMEN

	Condición
m comprendido entre las raíces	$af(m) < 0$
m menor que las raíces	$\Delta \geq 0 \wedge af(m) > 0 \wedge m < -\frac{b}{2a}$
m mayor que las raíces	$\Delta \geq 0 \wedge af(m) > 0 \wedge m > -\frac{b}{2a}$
Las raíces en $\langle m, n \rangle$, $m < n$	$\Delta \geq 0 \wedge af(m) > 0 \wedge af(n) > 0 \wedge m < -\frac{b}{2a} \wedge n > -\frac{b}{2a}$

3.8 ECUACIONES REDUCIBLES A CUADRÁTICAS

Son ecuaciones que no son cuadráticas, pero que mediante sustituciones adecuadas, se transforman en cuadráticas.

EJEMPLO 1

Resolver: $x^2 + x = 7\sqrt{x^2 + x + 2} - 12$

Solución: $x^2 + x + 2 > 0$, $\forall x \in \Re$ puesto que $\Delta = 1^2 - 4(2) < 0$

Luego: $x^2 + x + 2 + 10 - 7\sqrt{x^2 + x + 2} = 0$

Haciendo: $t = \sqrt{x^2 + x + 2} \;\rightarrow\; t^2 = x^2 + x + +2$

$\Rightarrow \quad t^2 - 7t + 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; (t-5)(t-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 2 \;\vee\; t = 5$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + x + 2} = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x + 2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \; x = -2 \;\vee\; x = 1$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + x + 2} = 5 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x + 2 = 25 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 236 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{93}}{2}$$

Ecuación Bicuadráda: Es una ecuación de la forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a, b, c \in \Re$, $a \neq 0$.

a) Resolución:

1. POR FORMULA GENERAL:

Se hace $y = x^2 \;\Rightarrow\; ay^2 + by + c = 0$

Luego: $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, pero como $x^2 = y$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Las raíces que se obtienen son:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = m \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = -m$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = n \quad ; \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = -n$$

2. POR FACTORIZACION: Siempre que la ecuación sea factorizable, se procede de acuerdo al caso:

EJEMPLO 2

Resolver: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solución:

$\Rightarrow (x-2)(x+2)(x+3)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 2,\; x_2 = -2,\; x_3 = 3,\; x_4 = -3$

b) Propiedades de las Raíces

1) La suma de las raíces es igual a cero

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m + (-m) + n + (-n) = 0$$

2) La suma de los productos binarios de las raíces es igual al coeficiente de x^2 entre el coeficiente de x^4

$$x_1x_2 + x_3x_4 = (m)(-m) + (n)(-n) \quad = \ -(m^2 + n^2) \ = \ \frac{b}{a}$$

3) El producto de las raíces es igual al termino independiente dividido entre el coeficiente de x^4

$$x_1x_2x_3x_4 = (m)(-m)(n)(-n) \quad = \ m^2n^2 \ = \ \frac{c}{a}$$

b) Formación De Una Ecuación Bicuadrada: Conocidas las raíces de una ecuación bicuadrada, se escribe:

$$x^4 + (x_1x_2 + x_3x_4)x^2 + (x_1x_2x_3x_4) = 0$$

$$x^4 + \left(\sum \text{productos binarios de las raices}\right)x^2 + (\pi \text{raices}) = 0$$

Ecuación recíproca

Se caracteriza por que la ecuación no se altera si se cambia x por $\frac{1}{x}$, por consiguiente, si dicha ecuación se verifica para $x = a$, también la hará para $x = \frac{1}{a}$

EJEMPLO 3

Resolver: $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$

Solución:

$$6x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25x^2\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12x^2 = 0,$$

$$x^2\left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12\right] = 0 \ ; \quad x \neq 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

Sea: $Z = x - \frac{1}{x} \Rightarrow Z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$

$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = Z^2 + 2$

Luego: $6(Z^2+2) - 25Z + 12 = 0 \Rightarrow 6Z^2 - 25Z + 24 = 0$

$\Leftrightarrow (2Z-3)(3Z-8) = 0 \Leftrightarrow Z_1 = \frac{3}{2} \vee Z_2 = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow Z = x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2, \vee x = -\frac{1}{2}.$

$\Rightarrow Z = x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{8}{3}x \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3, \vee x = -\frac{1}{3}.$

Ecuaciones binomias y trinomias: Las ecuaciones trinomias son de la forma:

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0, \quad a, b, c \in \Re, \quad a \neq 0$$

Que se resuelve haciendo: $x^m = y$ luego se obtiene:

$ay^2 + by + c = 0$, cuyas soluciones son y_1, y_2

Donde se tiene: $x^m = y_1$, $\vee$ $x^m = y_2$ Denominadas ecuaciones binomias.

EJEMPLO 4

Resolver: $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$

Solución:

Sea: $x^4 = y \Rightarrow y^2 - 97y + 1296 = 0$

$\Leftrightarrow (y-81)(y-16) = 0 \Leftrightarrow y = 81 \vee y = 16$

Luego: $x^4 = 81 \Leftrightarrow x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow (x^2+9)(x^2-9) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3, -3, 3i, -3i$

$\Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2, -2, 2i, -2i$

3.9 ECUACIONES CON RADICALES

Si una ecuación contiene una expresión con radical de índice par, tal como:

$$\sqrt{A},\ \sqrt[4]{A},\ \ldots\ ,$$

Para que las soluciones sean validas, debe resolverse la condición : $A \geq 0$, cuyo conjunto solución constituirá el universo U dentro del cual se resuelve luego la relación dada.

EJEMPLO 1

Resolver: $2x - 3 = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$

Solución:

$2x^2 - 3x + 4 > 0,\ \forall\ x \in \Re$

$2x - 3 \geq 0 \iff x \geq \dfrac{3}{2}$

Elevando al Cuadrado

$(2x-3)^2 = 2x^2 - 3x + 4 \iff 4x^2 - 12x + 9 = 2x^2 - 3x + 4$

$2x^2 - 9x + 5 = 0$

$\iff x_1 = \dfrac{9-\sqrt{41}}{4}$, $x_2 = \dfrac{9+\sqrt{41}}{4}$

Pero como $x \geq \dfrac{3}{2} \iff$ La solución es: $x = \dfrac{9+\sqrt{41}}{4}$

3.10 INECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO

Toda inecuación de 2do. Grado puede reducirse siempre a:

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0\ ;\ a \neq 0$$

El conjunto solución es: $\{x \in \Re /\ ax^2 + bx + c \gtrless 0\}$ y dependerá de la naturaleza del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Luego:

<u>Caso 1</u>: Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c$, tiene dos raíces reales diferentes, por ejemplo x_1, x_2, con $x_1 < x_2$ entonces.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

1.1 $ax^2 + bx + c > 0 \iff a(x - x_1)(x - x_2) > 0$

i. Si $a > 0 \Rightarrow x \in \langle -\infty, x_1 \rangle U \langle x_2, \infty \rangle$

ii. Si $a < 0 \Rightarrow x \in \langle x_1, x_2 \rangle$

1.2 $ax^2 + bx + c < 0 \iff a(x - x_1)(x - x_2) < 0$

i. Si $a > 0 \Rightarrow x \in \langle x_1, x_2 \rangle$

ii. Si $a < 0 \Rightarrow a(x - x_1)(x - x_2) > 0$

<u>Caso 2</u>: Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c$, tiene dos raíces iguales, es decir $x_1 = x_2$, luego:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

2.1 $ax^2 + bx + c > 0 \iff a(x - x_1)^2 > 0$

i. Si $a > 0 \Rightarrow x \in \Re - \{x_1\}$

ii. Si $a < 0 \Rightarrow x \in \phi$

2.2 $ax^2 + bx + c < 0 \iff a(x - x_1)^2 < 0$

i. Si $a > 0 \Rightarrow x \in \phi$

ii. Si $a < 0 \Rightarrow x \in \Re - \{x_1\}$

<u>Caso 3</u>: Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c$, no tiene raíces reales:

3.1 Si $a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$, $\forall\ x \in \Re$

3.2 Si $a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0$, $\forall\ x \in \Re$

EJEMPLO 1

Resolver: $x^2 - 7x + 6 > 0$

Solución:

$x^2 - 7x + 6 > 0 \iff (x - 1)(x - 6) > 0$

$\iff x \in \langle -\infty, 1 \rangle U \langle 6, \infty \rangle$

EJEMPLO 2

Resolver: $2x^2 - 10x - 12 < 0$

Solución:

$2x^2 - 10x - 12 < 0 \iff (x - 6)(2x + 2) < 0$

$\iff x \in \langle -1, 6 \rangle$

3.11 INECUACIONES CON RADICALES

La resolución se basa en los siguientes teoremas:

I. 1.1 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0 \Leftrightarrow a\geq 0 \quad \wedge \quad b\geq 0$

1.2 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq 0 \Leftrightarrow a=0 \quad \wedge \quad b=0$

II.2.1 $\sqrt{a}<b \Leftrightarrow a\geq 0 \quad \wedge \quad [b>0 \wedge a<b^2]$

2.2 $\sqrt{a}>b \Leftrightarrow a\geq 0 \quad \wedge \quad \{b<0 \vee [b>0 \wedge a>b^2]\}$

EJEMPLO 1

Resolver: $\sqrt{x^2-14x+13}<x+1$

Solución: Del teorema

$x^2-14x+13\geq 0 \quad \wedge \quad x+1>0 \quad \wedge \quad x^2-14x+13<(x+1)^2$

$(x-1)(x-13)\geq 0 \quad \wedge \quad x>-1 \quad \wedge \quad x^2-14x+13<x^2+2x+1$

$16x>12$

$\Leftrightarrow \; x\in\langle-\infty,1]\cup[13,\infty\rangle \quad \wedge \quad x\in\langle-1,\infty\rangle \quad \wedge \quad x\in\left\langle\frac{3}{4},\infty\right\rangle$

$\therefore$ C. S. $\left\{x\in\Re \,/\, x\in\left\langle\frac{3}{4},1\right]\cup[13,\infty\rangle\right\}$

3.12 INECUACIONES CON DOS VARIABLES SISTEMAS DE INECUACIONES

Una inecuación con dos variables, es una desigualdad de la forma:

$$f(x,y)\gtrless 0$$

Cuyo conjunto solución, es una región del plano xy, cuyos puntos satisfacen la desigualdad.

Un sistema de inecuaciones cuadráticas, son desigualdades de la forma:

$$a_1x^2+b_1x+c_1\gtrless 0$$

$$a_2x^2+b_nx+c_n\gtrless 0$$

$$\vdots$$

$$a_nx^2+b_nx+c_n\gtrless 0$$

Cuyo conjunto solución, es el conjunto de números reales, que esta dado por el intervalo común, que satisface todas las desigualdad.

3.13 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Para que valor de m:, las raíces de la ecuación $\frac{x^2+3x}{5x+12}=\frac{m-1}{m+1}$, serán iguales en magnitud pero de signo contrario.

Solución:

$$x^2(m+1)+3x(m+1)=5x(m-1)+12(m-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(m+1)-x(2m-8)-12(m-1)=0$$

Luego:

$$x_1+x_2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2m-8}{m+1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m=4}$$

PROBLEMA 2

Hallar m, n , tal que las ecuaciones tengan las mismas raices:

$$(5m-52)x^2-(m-4)x+4=0$$

$$(2n+1)x^2-5nx+20=0$$

Solución: Por propiedad:

$$\frac{5m-52}{2n+1}=\frac{-(m-4)}{-5n}=\frac{4}{20}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5m-52}{2n+1}=\frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 25m-260=2n+1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m-4}{5n}=\frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5m-20=5n$$

$$\Leftrightarrow \quad m=n+4 \quad \text{en} \quad (1)$$

$$25(n+4)-260=2n+1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n=7} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m=11}$$

PROBLEMA 3

Hallar α tal que la ecuación tenga raices iguales:

$$(\alpha+4)x^2-1=(2\alpha+2)x-\alpha$$

Solución:

$$(\alpha+4)x^2-(2\alpha+2)x+\alpha-1=0$$

Luego: $\quad \Delta=0: \ (2\alpha+4)^2-4(\alpha+4)(\alpha-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha=5}$

PROBLEMA 4

Determinar el intervalo de valores de c, para que las raíces de: $3x^2 - 10x + c = 0$ sean positivas.

Solución:

$$\Delta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-10)^2 - 4.3.c \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 100 - 12c \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c \leq \frac{25}{3}$$

Pero además en: $ax^2 bx + c = 0$

$c > 0 \quad \wedge \quad b < 0$ luego: $b = -10 < 0$

$$0 < c \leq \frac{25}{3}$$

PROBLEMA 5

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, si S_1 es la suma de las raíces, S_2 la suma de sus cuadrados y S_3 la suma de sus cubos. Hallar.

$S = aS_3 + bS_2 + cS_1$

Solución:

Sean x_1, x_2 las raíces, luego: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_1^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$$

$$= -\frac{b}{a}\left[\frac{b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right] = -\frac{b^3 - 3abc}{a^3}$$

Luego:

$$S = a\left[-\frac{b^3 - 3abc}{a^3}\right] + b\left[\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right] + c\left[-\frac{b}{a}\right]$$

$$S = -\frac{b^3 - 3abc}{a^2} + \frac{b^3 - 2abc}{a^2} - \frac{bc}{a}$$

$$S = -\frac{b^3 - 3abc}{a^2} + \frac{b^3 - 2abc}{a^2} - \frac{abc}{a^2} \Rightarrow \boxed{S = 0}$$

PROBLEMA 6

Hallar los valores de k tal que:

$$\frac{(a+1)x^2+ax+a}{x^2+x+1}>k\ ;\ a\in\Re\ ;\quad \text{se verifique } \forall x$$

Solución:

$x^2+x+1>0,\ \forall x\in\Re$

$\Rightarrow \qquad (a+1)x^2+ax+a>kx^2+kx+k$

$\Rightarrow (a+1-k)x^2+(a-k)x+(a-k)>0 \Leftrightarrow \Delta<0 \ \wedge\ (a+1-k)>0$

Luego: $(a-k)^2-4(a+1-k)(a-k)<0 \ \Leftrightarrow\ (a-k)(3k-3a-4)<0$

$\Leftrightarrow\ (k-a)(3k-3a-4)>0$

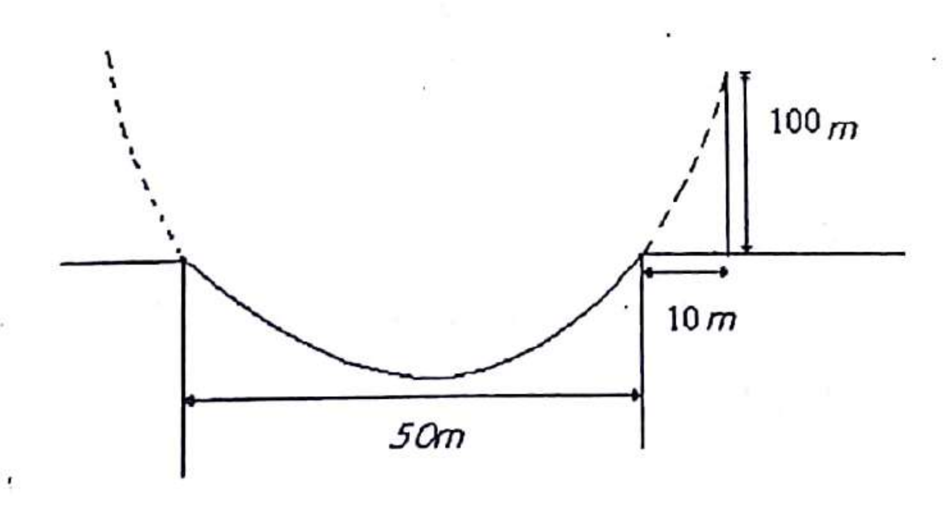
$\Leftrightarrow \quad k\in\langle-\infty,a\rangle U\left\langle a+\frac{4}{3},\infty\right\rangle>0 \ldots\ldots. \ (1)$

Además:

$a+1-k>0 \ \Leftrightarrow\ \ k<a+1 \quad \ldots\ldots\ (2)$

$k\in\langle-\infty,a\rangle$

PROBLEMA 7



La figura muestra un puente colgante de forma parabólica, la distancia entre peñascos es 50m., se pide determinar cual será la profundidad mínima que cae el puente, considerando el eje x sobre la superficie de los peñascos.

Solución:

En general: $y = kx(x-50) = k(x^2 - 50x)$

Si $x = 60 \Rightarrow y = 100 \Rightarrow 100 = k(60)(60-50) \Leftrightarrow 100 = 600k \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{6}$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{6}(x^2 - 50) = \frac{1}{6}\left[(x-25)^2 - 625\right] = \frac{1}{6}(x-25)^2 - \frac{625}{6}$$

$\Rightarrow$ mínimo $= -\dfrac{625}{6}$

PROBLEMA 8

Resolver la ecuación:

$$\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} + \frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$$

Solución: Haciendo un cambio de variables

$$\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} = y \; ; \; \frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{y}$$

En la ecuación original

$$y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$$

$$2y^2 + 2 = 5y$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2y & & -1 \\ y & & -2 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = 2, \quad y = \frac{1}{2}$$

Para $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} = 2, \Rightarrow \sqrt{x} = 6 - \sqrt{x}$

$$2\sqrt{x} = 6 \Rightarrow \boxed{x = 9},$$

Para $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}, \Rightarrow 4\sqrt{x} = 6 - \sqrt{x}$

$$5\sqrt{x} = 6 \Rightarrow \boxed{x = \frac{36}{25}}$$

$$\text{C. S.} = \left\{9, \frac{36}{25}\right\}$$

PROBLEMA 9

Resolver la ecuación:

$$\frac{x}{x+5}+\frac{5}{2\sqrt{x+5}}=\frac{6}{5}$$

Solución: Haciendo $\sqrt{x+5}=y$

$$x+5=y^2$$

$$x=y^2-5 \text{ .... } \alpha$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$\frac{y^2-5}{y^2}+\frac{5}{2y}=\frac{6}{5}$$

Eliminando denominadores:

$$10y^2-50+25y=12y^2$$

$$0=2y^2-25y+50$$

aplicando aspa simple:

$$2y^2-25y+50=0$$

$$\begin{matrix} 2y & \searrow\nearrow & -5 \\ y & \nearrow\searrow & -10 \end{matrix}$$

$$(2y-5)(y-10)=0$$

$$y=\frac{5}{2}; \qquad y=10$$

Para $y=\frac{5}{2}$ en (α) $x=\frac{25}{4}-5=\frac{5}{4}$

Para $y=10$ en (α) $x=100-5=95$

$$\text{C.S.}=\left\{\frac{5}{4}\ ,\ 95\right\}$$

PROBLEMA 10

Resolver la ecuación:

$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}}=\sqrt{x}$$

Solución: Racionalizando tiene:

$$\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)}{x-x-\sqrt{3}}+\frac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)}{x-x+\sqrt{3}}=\sqrt{x}$$

Efectuando:

$$-\left(x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)+\left(x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3x}$$

$$-x\sqrt{x}-\sqrt{3x}+\left(\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)^{3/2}+x\sqrt{x}-\sqrt{3x}+\left(x-\sqrt{3}\right)^{3/2}=\sqrt{3x}$$

Reduciendo:

$$\left(x+\sqrt{3}\right)^{3/2}+\left(x-\sqrt{3}\right)^{3/2}=3\sqrt{3x}$$

Elevando al cuadrado:

$$\left(x+\sqrt{3}\right)^{3}+2\left(x^2-3\right)^{3/2}+\left(x-\sqrt{3}\right)^{3}=9(3x)$$

$$x^3+3x^2\sqrt{3}+9x+3\sqrt{3}+2\left(x^2-3\right)^{3/2}+x^3-3x^2\sqrt{3}+9x+3\sqrt{3}=27x$$

$$x^3+9x+2\left(x^2-3\right)^{3/2}+x^3+9x=27x$$

Reduciendo: $2\left(x^2-3\right)^{3/2}=9x-2x^3$

Elevando al cuadrado: $4\left(x^2-3\right)^{3}=\left(9x-2x^3\right)^2$

$$4x^6-36x^4+108x^2-108=81x^2-36x^4+4x^6$$

$$27x^2=108$$

$$x^2=4$$

Como $x+\sqrt{3}\geq 0$, $x\geq-\sqrt{3}$ $\therefore$ $x=2$

C. S. $=\{2\}$

PROBLEMA 11

En la ecuación $P(x)=2ax^2+(3a-1)x+(a+b)=0$, calcular b, para que exista un solo valor de "a" que permita que las raices de $P(x)=0$, sean iguales.

Solución: Si las raíces de la ecuación son iguales, se deben cumplir: $\Delta=0$

$$\Delta=(3a-1)^2-4(2a)(a+b)=0$$

$$9a^2-6a+1-8a^2-8ab=0$$

$$a^2-(6+8b)a+1=0$$

Como es una ecuación cuadrática en "*a*", debe existir un solo valor "a".

Si $$\Delta = (6+8b)^2 - 4(1)(1) = 0$$

$$36 + 96b + 64b^2 - 4 = 0$$

$$64b^2 + 96b + 32 = 0$$

$$2b^2 + 3b + 1 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2b & \searrow\!\!\!\nearrow & +1 \\ b & \nearrow\!\!\!\searrow & +1 \end{array}$$

$$(b+1)(2b+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1 \text{ , } b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{C. S.} = \left\{-1 \text{ , } -\frac{1}{2}\right\}$$

PROBLEMA 12

Indicar todos los valores de p para las cuales las raíces de la ecuación: $(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0$, sean reales, positivas y no nulas.

Solución:

1) $p - 3 \neq 0$, $p \neq 3$

2) $x^2 - \left(\dfrac{2p}{p-3}\right)x + \dfrac{6p}{p-3} = 0$

3) Para que las raíces sean reales

$$\Delta = (-2p)^2 - 4(p-3)(6p) \geq 0$$

$$4p^2 - 4(6p^2 - 18p) \geq 0$$

$$5p^2 - 18p \leq 0$$

$$p(5p - 18) \leq 0$$

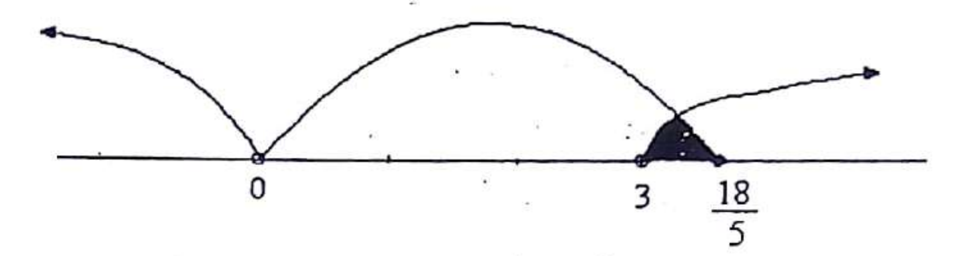
$$0 \leq p \leq \frac{18}{5}$$

4) Para que las raíces sean positivas

- $-\dfrac{2p}{p-3} < 0 \Rightarrow \dfrac{2p}{p-3} > 0 \quad \Rightarrow \quad p > 3 \ \vee \ p < 0$

- $\dfrac{6p}{p-3} > 0 \quad \Rightarrow \quad p > 3 \ \vee \ p < 0$

Graficando las soluciones.



$3 < p \leq \frac{18}{5}$

$C.S. = \langle 8, \frac{18}{5}]$

PROBLEMA 13

En la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ afirmamos.

I. Si una raíz es triple de la otra, entonces :

$3b^2 = 13ac$

II. Si el cuadrado de la suma de sus raíces es igual a su producto, entonces .

$b^2 = 2ac$

III. Si $a = b = c$, entonces no tiene raíces reales sin verdaderas.

Solución:

I. Si $x_1 = 3x_2$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$$3x_2 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{-b}{4a}$$

$$x_1 = -\frac{3b}{4a}$$

Además: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, $\left(-\frac{3b}{4a}\right)\left(-\frac{b}{4a}\right) = \frac{c}{a}$

$$3b^2 = 16ac$$

Luego: I es F

II. Si $x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = x_1 x_2$

$$(x_1 + x_2)^2 = 3x_1 x_2 \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 = 3\left(\frac{c}{a}\right)$$

$b^2 = 3ac$

II es F

III. Si $a = b = c$, se obtiene: $ax^2 + ax + a = 0$

$x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(1) = -3 < 0$

Las 2 raíces son complejas.

III es V

Respuesta: I F, II F, III V

PROBLEMA 14

¿Cuál es el producto de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, cuyo conjunto solución es $\{\Delta + 1, \Delta - 1\}$, si Δ es el discriminante de la ecuación.

Solución: Sean las raíces de la ecuación: x_1, x_2 reconstruyendo la ecuación:

$x_1 + x_2 = \Delta + 1 + \Delta - 1 = 2\Delta$

$x_1 x_2 = (\Delta + 1)(\Delta - 1) = \Delta^2 - 1$

La ecuación es: $x^2 - 2\Delta x + (\Delta^2 - 1) = 0$

Como Δ es el discriminante:

$\Delta = (-2\Delta)^2 - 4(1)(\Delta^2 - 1)$

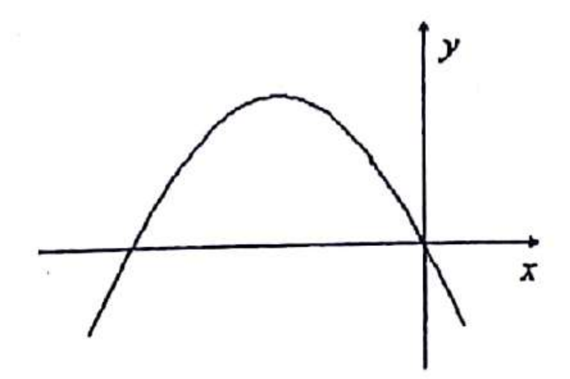
$\Delta = 4\Delta^2 - 4\Delta^2 + 4 = 4$

Reemplazando: $x^2 - 8x + 15 = 0$

Luego: $x_1 x_2 = 15$ Rpta: 15

PROBLEMA 15

La grafica de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ es:



Si $f(x) \leq f(-8)\ \forall\ x \in \Re$

Hallar la media aritmética de los valores de t al resolver la ecuación: $f(2 - t) = 0$

Solución: Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$,

Del grafico : $f(0) = 0$

$f(0) = c = 0$

$\therefore f(x) = ax^2 + bx$

Como $f(x) \leq f(-8) \quad \forall \ x \in \Re$

$ax^2 + bx \leq a(-8)^2 + b(-8)$

$ax^2 + bx - 64a + 8b \leq 0$

Del grafico $a < 0$

$\Delta = (b)^2 - 4a(-64a + 8b) \ \leq \ 0$

$b^2 - 32ab + 256a^2 \ \leq \ 0$

$(b - 16a)^2 \leq \ 0$

$\therefore \ b - 16a = \ 0 \ \Rightarrow \ b = 16a$

Reemplazando en $f(x)$

$f(x) = ax^2 + 16ax \ = \ ax(x + 18)$

Hallando: $f(2 - t)$

$f(2 - t) \ = \ a(2 - t)(2 - t + 16) \ = \ 0$

$a(2 - t)(18 - t) \ = \ 0$

- $2 - t \ = \ 0 \ , \ t = 2$
- $18 - t = 0 \ , \ t = 18$

Media aritmética $= \dfrac{2 + 18}{2} = \dfrac{20}{2} = \ 10$

PROBLEMA 16

En la ecuación bicuadrada $x^4 - 3(a + 4)x^2 + (a + 1)^2 = 0$. calcular a si sus raíces se encuentran en progresión aritmética.

Solución: Sean las raíces ÷ $b - 3r, b - r, b + r, \ b + 3r$

Aplicando propiedades:

I) $b - 3r \cdot b - r \cdot b + r \cdot \ b + 3r = 0$

$4b = 0 \cdot b = 0$

I) Las raíces son: $-3r, -r, r, \ 3r$

3) $(-3r)(3r)+(-r)(r) = -3(a+4)$

$-9r^2 - r^2 = -3(a+4)$

$10r^2 = 3(a+4)$

$r^2 = \frac{3}{10}(a+4)$ .... α

4) $(-3r)(-r)(3r)(r) = (a+1)^2$

$9r^4 = (a+1)^2$

$r^4 = \frac{(a+1)^2}{9}$ .... β

5) (α) en (β)

$\left[\frac{3}{10}(a+4)\right]^2 = \frac{(a+1)^2}{9}$

$\frac{a+4}{a+1} = \pm\frac{10}{9}$

$\frac{a+4}{a+1} = \frac{10}{9}$, $10a+10 = 9a+36 \Rightarrow \boxed{a=26}$

$\frac{a+4}{a+1} = -\frac{10}{9}$, $9a+36 = -10a-10$, $\Rightarrow \boxed{a=-\frac{46}{9}}$

PROBLEMA 17

Sí x_1, x_2 son las soluciones reales de la ecuación reciproca simétrica

$ax^4 + (b-3)x^3 - 10x^2 + (5-a)x + (b+6) = 0$

Hallar $E = (x_1 + x_2)^{x_1 x_2}$

Solución: Si es una ecuación reciproca

$a = b+6$ .... (1)

$b - 3 = 5 - a$

$b = 8 - a$ .... (2)

(2) en (1) $a = 8 - a + 6 \Rightarrow a = 7$, $b = 1$

Reemplazando en la ecuación normal

$7x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 2x + 7 = 0$

Aplicando aspa doble especial

$7x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 2x + 7 = 0$

$7x^2 \quad \boxed{+12x} \quad 7$

$x^2 \quad \boxed{-2x} \quad 1$

$(7x^2 + 12x + 7)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$7x^2 + 12x + 7 = 0 \qquad \Delta = (+12)^2 - 4(7)(7) < 0 \qquad$ Raíces complejas

$x^2 - 2x + 1 = 0\ , \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = +1$

$E = (1+1)^{(1)(1)} = 2$

PROBLEMA 18

Resolver la ecuación

$$\sqrt{x + 10 + 4\sqrt{3x-6}} + \sqrt{x + 25 + 6\sqrt{3x-6}} = 11\sqrt{3}$$

Solución: Haciendo $\sqrt{3x-6} = y \ \Rightarrow \ 3x - 6 = y^2\ ;\ y > 0$

$x = \dfrac{y^2+6}{3}$ .... (α)

Reemplazando:

$$\sqrt{\frac{y^2+6}{3} + 10 + 4y} + \sqrt{\frac{y^2+6}{3} + 25 + 6y} = 11\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{y^2+12y+36}{3}} + \sqrt{\frac{y^2+18y+81}{3}} = 11\sqrt{3}$$

$$\sqrt{(y+6)^2} + \sqrt{(y+9)^2} = 33$$

$$|y+6| + |y+9| = 33$$

Como $y > 0$, $y + 6 + +y + 9 = 33 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 9}$

En (α) $\quad x = \dfrac{y^2+6}{3} = \dfrac{9^2+6}{3} = \dfrac{81+6}{3} = 29$ $\qquad$ Respuesta: $\boxed{x = 29}$

PROBLEMA 19

Resolver la ecuación: $\sqrt{2x-5} + \sqrt[3]{4x-4} = 3$

Para raíces reales

Solución: Haciendo $\sqrt[3]{4x-4} = y$

$4x - 4 = y^3 \Rightarrow x = \dfrac{y^3+4}{4}$ .... (α)

Reemplazando en la ecuación:

$$\sqrt{2\left(\frac{y^3+4}{4}\right) - 5} + y = 3$$

$$\sqrt{\frac{2y^3+8-20}{4}} + y = 3$$

$$\sqrt{2y^3-12} + 2y = 6$$

$$\sqrt{2y^3-12} = 6 - 2y$$

$2y^3 - 12 \geq 0, \quad y \geq \sqrt{6} \quad \vee \quad y \leq -6$

$6 - 2y \geq 0, \quad -2y \geq -6 \quad \vee \quad y \leq 3$

$\therefore \sqrt{6} \leq y \leq 3$

Elevando al cuadrado

$$2y^3 - 12 = 36 - 24y + 4y^2$$

$$2y^3 - 4y^2 + 24y - 48 = 0$$

$$y^3 - 2y^2 + 12y - 24 = 0$$

$$y^2(y-2) + 12(y-2) = 0$$

$$(y-2)(y^2+12) = 0$$

$y^2 + 12 = 0$ raíces complejas

$y - 2 = 0 \quad , \quad y = 2$

En (α) $\quad x = \dfrac{y^3+4}{4} = \dfrac{8+4}{4} = 3$

C. S. = $\{3\}$

PROBLEMA 20

Resolver la ecuación:

$$a(x+b)=x+\sqrt[3]{xb^2}-\sqrt[3]{x^2b}$$

Solución: Haciendo $x=\dfrac{b}{k^3}$

Antes, efectuando:

$$ax+ba=x+\sqrt[3]{xb^2}-\sqrt[3]{x^2b}$$

$$ax+ab-x=\sqrt[3]{xb^2}-\sqrt[3]{x^2b}$$

Reemplazando: $x=\dfrac{b}{k^3}$

$$\frac{b}{k^3}(a-1)+ab=\sqrt[3]{\frac{b}{k^3}b^2}-\sqrt[3]{\frac{b^2}{k^6}b}$$

$$\frac{b}{k^3}(a-1)+ab=\frac{b}{k}-\frac{b}{k^2}$$

$$b(a-1)+k^3ab=k^2b-bk$$

Simplificando:

$$a-1+k^3a=k^2-k$$

$$a(k^3+1)=(k^2-k+1)$$

$$a(k+1)(k^2-k+1)=(k^2-k+1)$$

$$a(k+1)=1\quad\Rightarrow\quad k=\frac{1-a}{a}$$

$$x=\frac{b}{k^3}=\frac{b}{\dfrac{(1-a)^3}{a^3}}=\frac{ba^3}{(1-a)^3}$$

3.14 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Dar a^2+ab+b^2, para que las raíces de la ecuación

$$\frac{b+1}{x-a}+\frac{a+1}{x-b}=\frac{x-a}{a+1}+\frac{x-b}{a+1}$$

sea igual a^3:

A) 3 B) $3/2$ C) $3/4$ D) $3/5$ E) $1/3$

PROBLEMA 2

Hallar los valores de k de modo que las raíces de la ecuación $4x^2-16x+k^2=0$, estén en el intervalo $\langle 1,3\rangle$, si $k\varepsilon[a,b\rangle U\langle c,d]$, hallar $a+b+c+d$

A) -3 B) -2 C) -4 D) 0 E) 5

PROBLEMA 3

Si r, s son las raíces de la ecuación $x^2+bx+4c=0$; $(2r+b).(2s+b)$ de $x^2+mx+n=0$, hallar $E=\frac{m^2-4n}{b^2-16c}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) $\frac{1}{2}$

PROBLEMA 4

Dada la ecuación $-x^2+mx-m-3=0$ hallar si existe el menos entero m para que una de sus raíces sea menor que 10. Dar la suma de las cifras de " m".

A) 3 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA 5

1.Resolver en $\Re$: $(x-5,5)^4+(x-4,5)^4=1$

A) $-5,5$ B) $-4,5$ C) 4,5 D) 3,5 E) 6,5

PROBLEMA 6

Resolver la ecuación: $x^6 - 9x^5 + 30x^4 = 45x^3 - 30x^2 + 9x - 1$. Si una raíz es de la forma $\frac{A + \sqrt{B}}{2}$, dar : A+B

A) 5 B) 3 C) 8 D)7 E)6

PROBLEMA 7

Resolver la ecuación: $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$, y señalar la suma de todas las raíces de la ecuación.

A) 2 B) 1 C) 10 D)12 E)13

PROBLEMA 8

Si $a \geq 1$, obtener la suma de las soluciones reales de la ecuación: $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$ C) $\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ D) $\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$ E) $\frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$

PROBLEMA 9

Calcular m con la condición que cumplan para todo x real $-3 < \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$

A) $\langle -7,7 \rangle$ B) $\langle -5,1 \rangle$ C) $\langle -\alpha,11 \rangle$ D) $\langle -5,11 \rangle$ E) $\langle -7,1 \rangle$

PROBLEMA 10

Dar $m + n$ para las cuales las ecuaciones:

$$(m - 2)x^2 - (m + 2)x - (n^3 + 6) = 0$$

$$(m - 1)x^2 - (m^2 + 1)x - (4n^3 - 4) = 0$$

Tendrán las mismas relaciones

A) 3 B) 2 C) 5 D)4 E)1

PROBLEMA 11

Si $\{x_1, x_2, x_3\}$ son las tres raíces reales de la ecuación reciproca:

$$P(x) = Ax^5 + (A + B - 3)x^4 + (B - 13)x^3 - (A + 5)x^2 + (B - A + 11)x + (B + 6) = 0$$

Hallar $E = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}$

A) -1 B) 1 C) $-\frac{5}{7}$ D) $-\frac{7}{5}$ E) $\frac{7}{5}$

PROBLEMA 12

Cuantos valores enteros asume "x" en las inecuacion:

$$\sqrt{3x-4}-\sqrt{3x-6}>\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D)4 E) 5

PROBLEMA 13

Proporcionar "m" a fin de que la suma de las raices positivas de la ecuación bicuadrada $x^4-(3m+4)x^2+(m+1)^2=0$, sea 6.

A) 3 B) 23 C) 34 D) 6 E) 15

PROBLEMA 14

Resolver la ecuacion: $\dfrac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=a^3\left\{\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}\right\}$

A) $(a-1)^2$ B) $2a$ C) $\dfrac{(a-1)^2}{2a}$ D) $\dfrac{a}{(a-1)^2}$ E) $\dfrac{(a-1)^2}{a}$

PROBLEMA 15

Si el conjunto solución de la ecuación: $mx^2+nx+2=0$, es $\left\{\dfrac{\alpha}{\alpha+1},\dfrac{\alpha}{2\alpha-1}\right\}$, calcular "n"

A) -10 B) -6 C) 0 D) 2 E) 5

PROBLEMA 16

Sea $f(x)=3x^2-2(a+2)x+3(a-1)$, para números enteros y positivos de "a" se verifica que $x_1+3<a<x_2+3$, donde $a\in\Re/x_1,x_2$ son raíces reales diferentes de la ecuación

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

PROBLEMA 17

Si Δ es el discriminante positiva de la ecuación $x^2-(\Delta-1)x+\left(\Delta+\frac{19}{4}\right)=0$

determinar de conjunto solucion.

A) $\left\{\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right\}$ C) $\left\{\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right\}$ D) $\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$ E) ϕ

PROBLEMA 18

Un terreno rectangular con uno de sus lados en la orilla de un río va a ser cercado en uno de sus tres lados, utilizando 100m. de cerco de alambre. Calcular las dimensiones del terreno para que su área se máxima.

A) 50.25 B)25.50 C) 30,70 D)30.20 E)20.30

3.15 TEST DE AUTOEVALUACION

PROBLEMA 1

Resolver la ecuación: $|x|-|x-1|+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}$

A) $[1,\infty\rangle$ B) N C) $[10,\infty\rangle$ D) $\{10\}$ E) $\{0,10\}$

PROBLEMA 2

Si x es un numero real , que valor numérico no puede tomar la expresión:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$$

A) 5 B) -35 C) -10 D) 1 E) 10

PROBLEMA 3

Si una de las raíces de la ecuación $x^2+ax+b=0$, es el cuadrado de la otra. Calcular:

$$E=\frac{a^3+b^2}{3a-1}$$

A) a B) b C) $\frac{1}{a}$ D) $\frac{1}{b}$ E) 1

PROBLEMA 3

La ecuación $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, presenta como conjunto solución: $\left\{\frac{3k+2}{3k+1}, \frac{3k+5}{3k+4}\right\}$ en función de los datos, calcular $E = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{(a_0 + a_1 + a_2)^2}$

A) 1　　B) $k+2$　　C) k　　D) -1　　E) 9

PROBLEMA 4

Si $ax + by = c$ ¿Cuál es el valor mínimo de: $x^2 + y^2$

A) $\frac{a^2}{b^2 + c^2}$　　B) $\frac{b^2}{a^2 + c^2}$　　C) $\frac{c^2}{a^2 + b^2}$　　D) $\frac{a^2}{ab + c}$　　E) $\frac{b^2}{bc + a}$

PROBLEMA 5

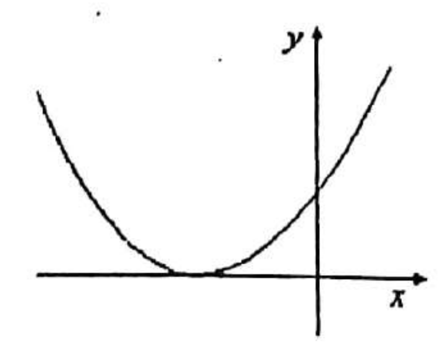
Si $\{x_1, x_2, x_3\}$ son tres raíces reales de la ecuación recíproca: $Ax^5 + (A + B - 3)x^4 + (B - 13)x^3 - (A + 5)x^2 + (B - A + 11)x + (b + 6) = 0$, hallar:

$$E = \frac{x_1x_2x_3}{\text{Suma de raíces}}$$

A) -1　　B) 1　　C) $-\frac{5}{7}$　　D) $-\frac{7}{5}$　　E) $\frac{7}{5}$

PROBLEMA 6

Determine el valor (o valores) del parámetro real "p" para que la grafica de la función $f(x) = (p+1)x^2 + (5p-3)x + (2p+3)$ sea:



A) $\left\{\frac{1}{17}, -3\right\}$　　B) $\left\{-\frac{1}{17}, 3\right\}$　　C) $\{3\}$　　D) $\{17\}$　　E) $\{-3\}$

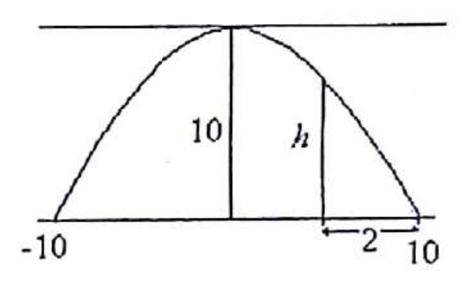
PROBLEMA 7

El perímetro de un rectángulo es 90m. y su área es superior a $504m^2$. si sus lados son números enteros. ¿En cuanto excede el largo al ancho?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA 8

Un puente horizontal tiene la forma de un arco parabólico, cual es la altura del arco a 2m desde la orilla.



a) 3,6 b) 3,0 c) 4,0 d) 3.8 e) 3,7

PROBLEMA 9

Si α y β son raíces de la ecuación cuadrática en "x"

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

Calcular:

$$E = \frac{a_0(\alpha^n + \beta^n) + a_1(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})}{\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}}$$

Donde: $n \in N$ y $n > 2$

A) $-a_0$ B) $-\frac{a_1}{2}$ C) $-a_2$ D) 0 E) -1

CAPÍTULO 4

FUNCIONES

4.0 OBJETIVOS

La idea de función es uno de los conceptos más fundamentales de la matemática. Con este capítulo se pretende que el alumno domine los conceptos básicos de la teoría de funciones reales de variable real que le sea de utilidad para sus futuros estudios.

4.1 DEFINICIÓN GENERAL

Dados dos conjuntos A y B no vacíos, una función de A en B es toda relación $f \subset A \times B$ que cumple la siguiente condición:

"Para cada elemento x de A le corresponde de algún modo un único elemento y de B tal que $(x, y) \in f$"

o equivalentemente cumple la condición:

"f es un conjunto de pares ordenados donde no se tiene dos pares distintos con el mismo primer elemento"

Es decir f es una función si $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f$ entonces $y = z$.

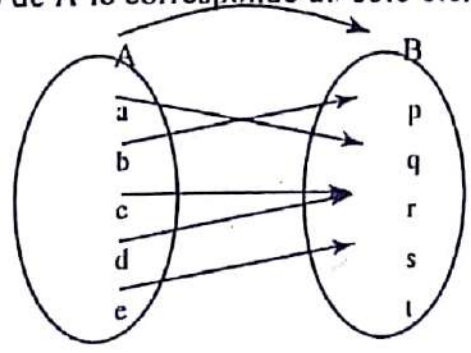
Notación: Una función se denota por $f : A \rightarrow B$ y se lee:

"f es la función de A en B",

A es el dominio o conjunto de partido y B es el conjunto de llegada.

EJEMPLO 1

Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{p, q, r, s, t\}$. El siguiente diagrama ilustra una función pues a cada elemento de A le corresponde un solo elemento de B.



$$f = \{(a, q)\ (b, p)\ (c, r)\ (d, r)\ (e, s)\} \subset A \times B,$$

y se observa que f no tiene dos pares distintos con el mismo primer elemento.

En general, si $x \in A$ al elemento $y \in B$, que se le hace corresponder a x mediante f se llama imagen de x o valor de f en x y se denota por

$$y = f(x) \quad o \quad f(x) = y,$$

x se denomina pre-imagen. En el ejemplo anterior $f(a) = q$, q es el valor o imagen de a según f.

EJEMPLO 2

Sea g el hacer corresponder a cada número real su cuadrado más 1, esto es, para cada número real x le corresponde $y = f(x) = x^2 + 1$.

Así: $g : R \rightarrow R$ con $y = f(x) = x^2 + 1$.

EJEMPLO 3

Sea h el asignar a cada país del mundo su ciudad capital. El dominio de h es el conjunto de países del mundo y su conjunto llegada es el conjunto de ciudades capitales del dominio, así:

$$h(\text{Perú}) = \text{Lima}$$

Observemos que la función dada por el ejemplo 2 viene dada por una fórmula precisa. Pero no siempre tiene que ser así el ejemplo 1 la regla de correspondencia de la función se da mediante un diagrama o en el ejemplo 3 mediante conceptos geográficos o si el dominio es finito la correspondencia puede ser enunciada para cada elemento del dominio.

4.2 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION – GRAFICAS

Dominio de una función $f : A \rightarrow B$, que se denota por

$$\text{Dom } f = Df = \{x \in A \mid (x, y) \in f\} = A$$

De los ejemplos anteriores $\text{Dom } f = \{a, b, c, d, e\}$ $\text{Dom } g = R$

Rango de una función $f : A \rightarrow B$, que se denota Ran f, es el conjunto de todas las imágenes de los elementos de A según f o sea

$$\text{Ran } f = Rf = \{y \in B \mid (x, y) \in f\} \subset B$$

En los ejemplos anteriores

Ran f = {p, q, r, s}

Ran g = [1, ∞>

Determinación de una función:

Una función está bien determinada o definida si se conoce

i) Su dominio, y

ii) Su regla de correspondencia

Funciones iguales:

Dos funciones f y g son iguales, f = q, si y solo si

i) Dom f = Dom g ≠ ϕ

ii) f(x) = g(x), ∀ x ∈ Dom f

$$f = \left\{\left(x, \sqrt{x^2}\right) / x \in R\right\} \text{ y } g = \{(x, |x|) / x \in R\}$$

estas funciones son iguales pues

$$\text{Dom}f = \text{Dom}g = R \ \wedge \ \sqrt{x^2} = |x|, \ \forall x \in R$$

EJEMPLO 1

Sean las funciones
$$f = \left\{\left(x, \sqrt{x^2}\right) / x \in R\right\} \text{ y}$$
$$g = \{(x, x) / x \in R\},$$

en este caso las funciones f y g no son iguales, f ≠ g, pues a pesar de tener el mismo dominio difieren en su regla de correspondencia

$$\sqrt{x^2} \neq x \qquad \forall x \in R$$

EJEMPLO 2

Sean las funciones
$$f = \left\{\left(x, \frac{x}{2}\right) / x \in R - \{0\}\right\} \text{ y}$$
$$g = \{(x, x) / x \in R\}$$

f ≠ g pues Dom f = R – {0} ≠ Dom g = R, aunque f(x) = g(x) ∀ x ≠ 0.

EJEMPLO 3

Sea la función $f : A \to [1, 3]$ hallar el mayor conjunto A tal que:

$$\text{Domf} = A, f(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{ y Ranf} = <1,3]$$

Solución:

Como $\dfrac{x-1}{x+2} = 1 - \dfrac{3}{x+2}$ entonces

$$f(x) \in [1,3] \leftrightarrow 1 < 1 - \frac{3}{x+2} \leq 3$$

$$\leftrightarrow 0 > \frac{3}{x+2} \geq -2 \leftrightarrow \frac{x+2}{3} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\leftrightarrow x \leq -\frac{7}{2} \leftrightarrow x \in <-\infty, -7/2] = A$$

Por lo tanto, Dom f = A = <-∞, -7/2].

Funciones reales de variable real:

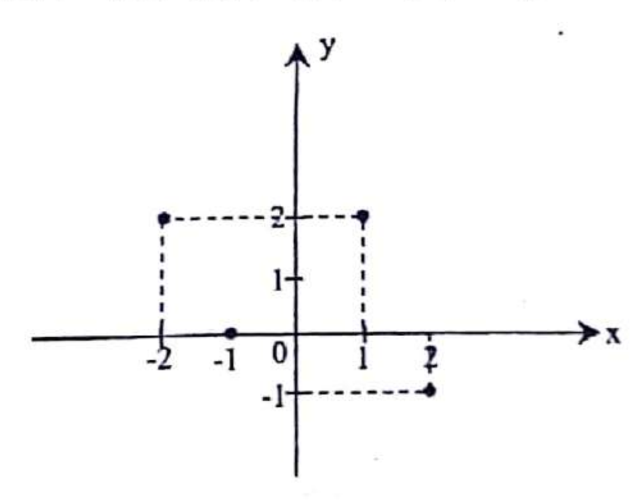
Si una función $f : A \to B$ cumple que $A \subset R$ y $B \subset R$ se dirá una función real de variable real.

Gráfica de una función:

Si f es una función real de variable real, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados de f considerados como un conjunto de puntos de R^2.

EJEMPLO 4

Graficar la función f, f = {(1, 2), (2, -1), (-1, 0), (-2, 2)}

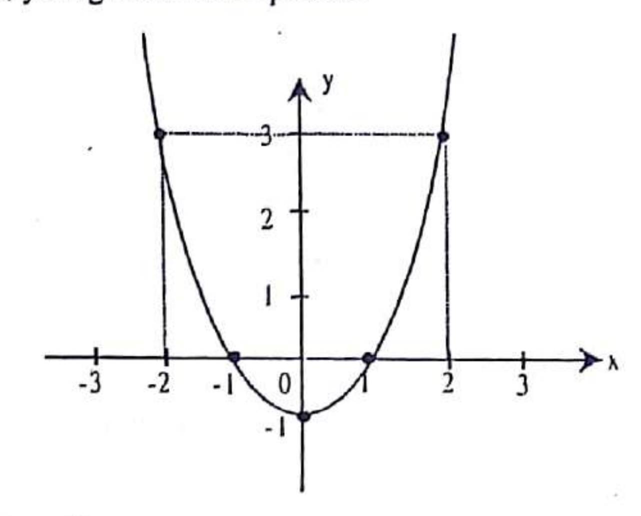


EJEMPLO 5

Graficar $f : R \rightarrow R,\ y = f(x) = x^2 - 1.$

Para tener una idea del gráfico de f es necesario obtener algunos pares ordenados de f y obtener su correspondiente gráfico, y luego unir estos puntos.

x	y	(x,y)
0	-1	(0,1)
1	0	(1,0)
-1	0	(-1,0)
2	3	(2,3)
-2	3	(-2,3)

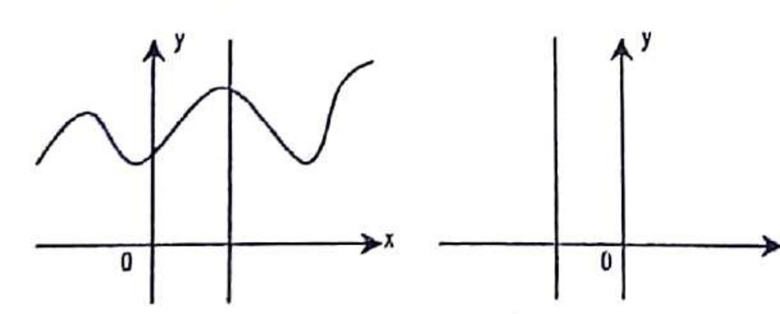


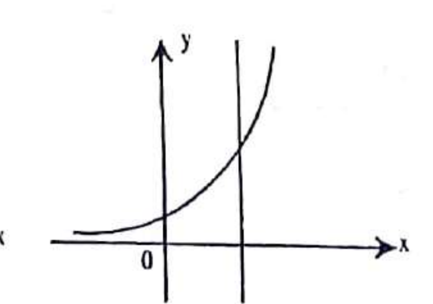
Caracterización gráfica de una función:

La relación $f \subset R \times R$ es una función real de variable real si y sólo si toda recta vertical intercepta a la gráfica de f en a lo más un punto.

EJEMPLO 6

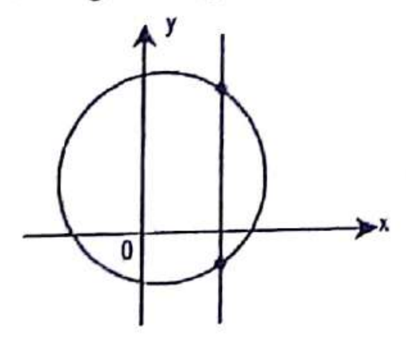
Los siguientes gráficos representan una función:

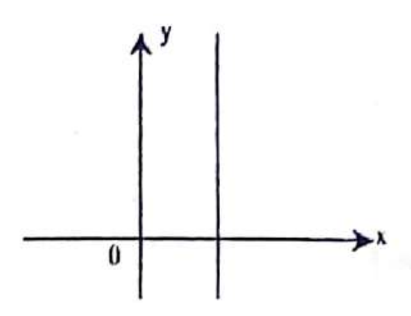


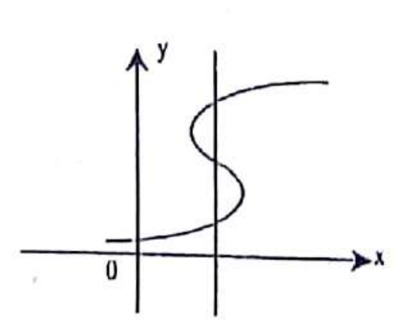


EJEMPLO 7

Las siguientes gráficas no son de una función





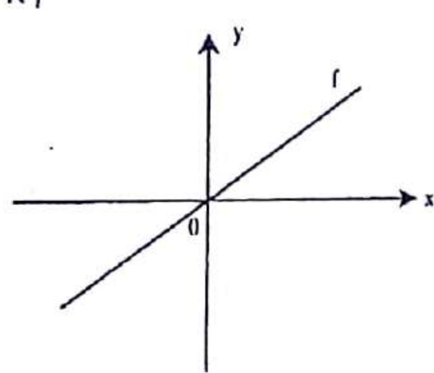


4.3 FUNCIONES ESPECIALES O ELEMENTALES

1. Función identidad:

Es la función $f = I : R \rightarrow R$ con regla de correspondencia $y = I(x) = x$.

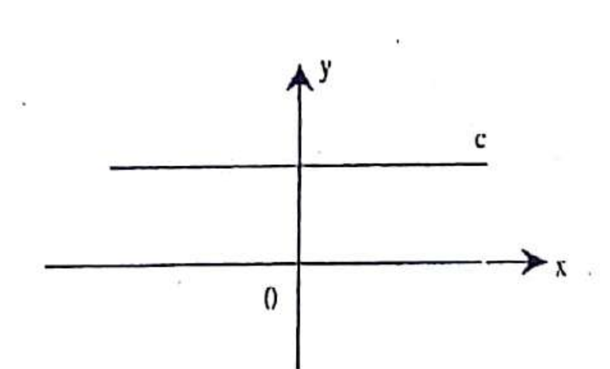
Es decir $I = \{(x, x)/x \in R\}$



2. Función constante

Es la función $f : R \rightarrow R$ con regla de correspondencia $f(x) = c$, c un valor real único, se denota por $f = c$.

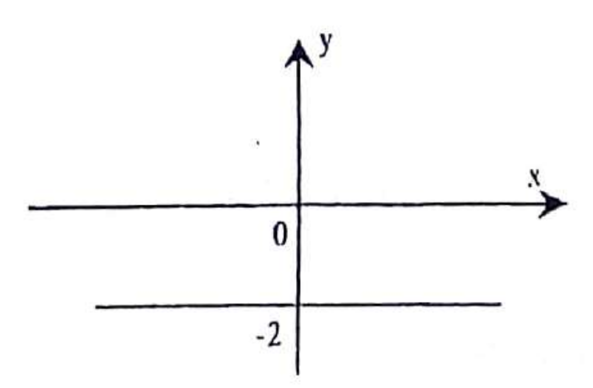
Es decir $C = \{(x, c) / x \in R\}$; $Ranf = \{c\}$



EJEMPLO 1

$y = f(x) = -2$

$-2 = \{(x,-2)/x \in R\}$



EJEMPLO 2

Sea f una función constante tal que

$$\frac{f(3) + f(2)}{f(5) - 3} = 8$$

Calcular: $E = f(1997) + f(1998) + 2$

Solución:

Sea $f(x) = c$ entonces $\dfrac{c+c}{c-3} = 8$

entonces $c = 4$

Luego $f(1997) + f(1998) + 2 = 4 + 4 + 2 = 10$

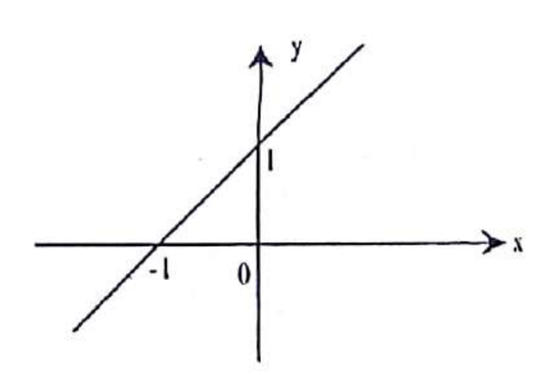
3. Función lineal:

Es la función $f : R \rightarrow R$ con regla de correspondencia $y = f(x) = mx + b$, $m \neq 0$.

$$f = \{(x, mx + b) / x \in R\}$$

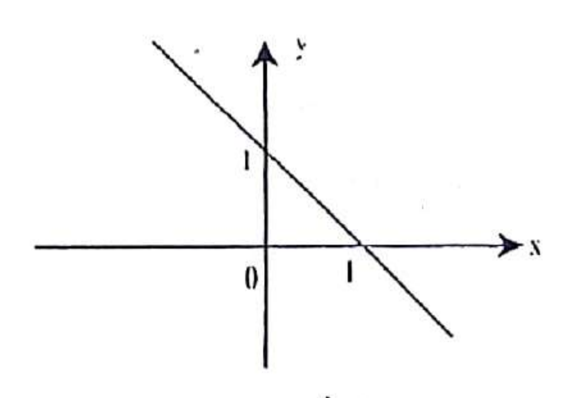
EJEMPLO 3

$y = f(x) = x + 1$



EJEMPLO 4

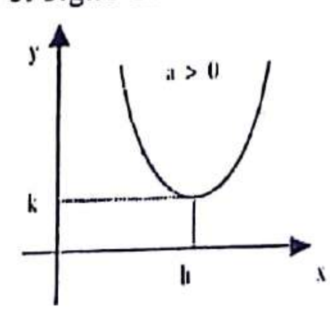
$y = f(x) = -x + 1$

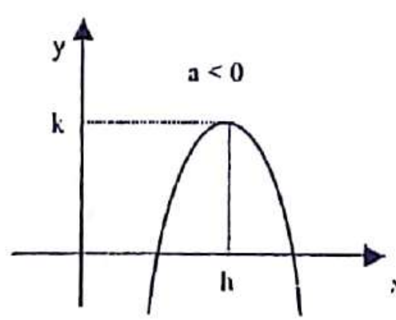


4. Función cuadrática:

Es la función $f : R \rightarrow R$ con regla de correspondencia $y = f(x) = ax^2+bx+c$, $a\neq0$, a, b y c constantes reales.

Del capítulo III sabemos que el gráfico de f es una parábola cuyas gráficas se distinguen según el signo de a.





$$y = f(x) = a(x - h)^2 + k$$

EJEMPLO 5

Sea la función $f: R \to R$ con $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, calcular su rango.

Solución:

Como
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Podemos despejar x:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c + \frac{b^2}{4a}}{a} \geq 0 \qquad ...(*)$$

Se tiene dos casos:

i) Si $a > 0$ entonces en (*) $\quad y - c + \frac{b^2}{4a} \geq 0$

entonces $\quad y \geq c - \frac{b^2}{4a}$

y el rango de f es: $\quad \left[c - \frac{b^2}{4a}, \infty\right\rangle$

ii) Si $a < 0$ en (*) $\quad y - c + \frac{b^2}{4a} \leq 0$

entonces $\quad y \leq c - \frac{b^2}{4a}$

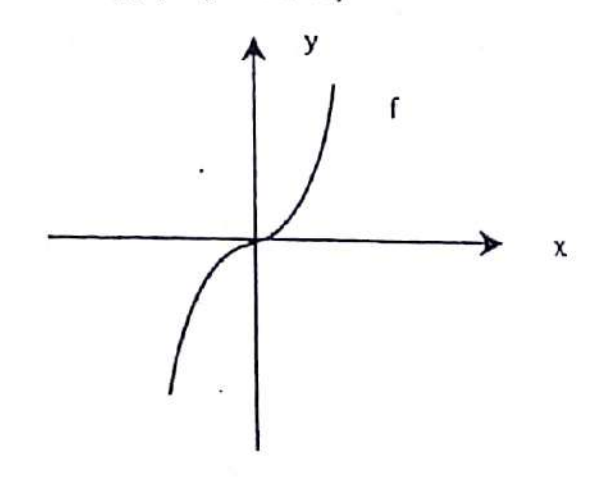
y el rango de f es: $\quad \left[-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\right\rangle$

5. Función cúbica

Es la función $f: R \to R$ con regla de correspondencia $y = f(x) = x^3$.

$$f = \{(x, x^3) / x \in R\}$$

x	$y = x^3$
0	0
½	1/8
1	1
2	8
-1/2	-1/8
-1	-1
-2	-8



EJEMPLO 6

Para la función cúbica $f : R \to R$, $f(x) = x^3$, calcular su rango.

Solución:

Es suficiente probar que cada número real y es la imagen según f, de algún valor real x del dominio que es R.

En efecto si $y \in R$ buscamos un $x \in R$ tal que, $f(x) = x^3 = y \leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$.

Así: $$f\left(\sqrt[3]{y}\right) = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = y$$

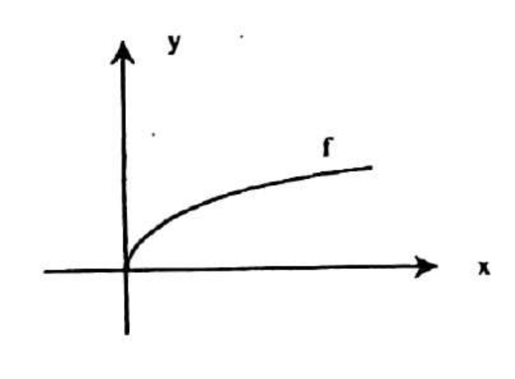
$$\therefore \ \text{Ranf} = R$$

6. Función raíz cuadrada:

Es la función $f : [0,\infty> \to R$ con regla de correspondencia

$y = f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f = \{(x, \sqrt{x}) / x \geq 0\}$

x	$y = \sqrt{x}$
0	0
1/4	1/2
1	1
4	2
9	3



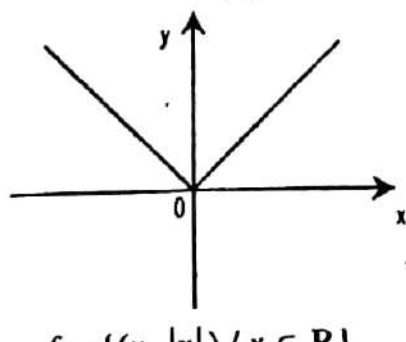
Evidentemente Ran f = [0, ∞>

7. Función valor absoluto:

Es la función $f : R \to R$ con regla de correspondencia

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$\text{Ranf} = [0,\infty>$ pues $|x| \geq 0 \quad \forall x \in R$



$f = \{(x, |x|) / x \in R\}$

EJEMPLO 7

Para la función $f(x) = |x - 1| - x$. $x \in R$, hallar su rango y su gráfica.

Solución:

Para hallar el rango de f analicemos su regla de correspondencia en dos partes de su dominio <-∞, ∞>.

Si $x \geq 1$, $f(x) = x - 1 - x = -1$

Si $x < 1$, $f(x) = (1 - x) - x = 1 - 2x$,

entonces de $x < 1 \leftrightarrow -2x > -2 \leftrightarrow f(x) = 1 - 2x > -1$

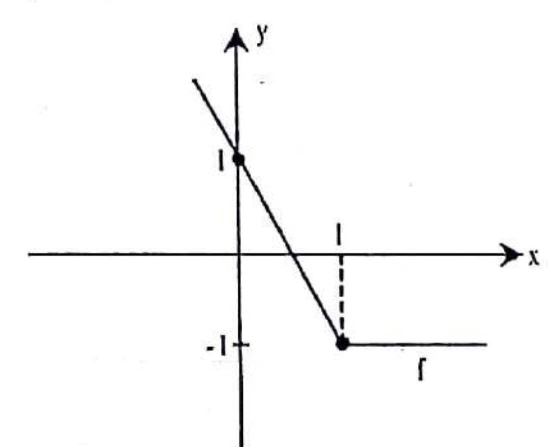
De esto $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$ si y solo si $f(x) \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \{-1\} = \langle -\infty, -1]$

Por lo tanto Ranf = <-∞, -2]

y $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 1 \\ 1 - 2x, & x < 1 \end{cases}$

Su gráfica:

x	f(x)
x ≥ 1	-1
1/2	0
0	1



8. Función recíproca:

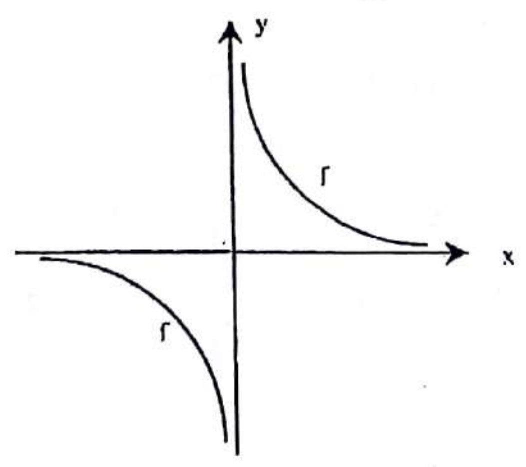
Es la función $f : R - \{0\} \rightarrow R$ con regla de correspondencia $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Así $f = \{(x, 1/x) / x \in R - \{0\}\}$

Como $x > 0 \leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ y $x < 0 \leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} < 0$

Entonces Ranf = R – {0}

x	$y = x^{-1}$
1/3	3
1/2	2
1	1
-1	-1
-1/2	-2
-1/3	-3



9. Función máximo entero:

Antes de definir la mencionada función, consideraremos algunos conceptos:

1. Cualquier número real x tiene la siguiente propiedad: x está entre dos enteros consecutivos, es decir, existen n y n + 1, tal que: $n \leq x < n + 1$
2. El número n que es el mayor entero menor o igual a x se llama el máximo entero de x.

Notación:

$[\![x]\!] = n$ si $n \leq x < n + 1$

Así

$[\![2]\!] = 2$ pues $2 \leq 2 < 3$

$[\![1,5]\!] = 1$ pues $1 \leq 1,5 < 2$

$[\![0.5]\!] = 0$ pues $0 \leq 0.5 < 1$

$[\![-1,5]\!] = -2$ pues $-2 \leq -1,5 < -1$

$[\![\pi]\!] = 3$ pues $3 \leq \pi < 4$

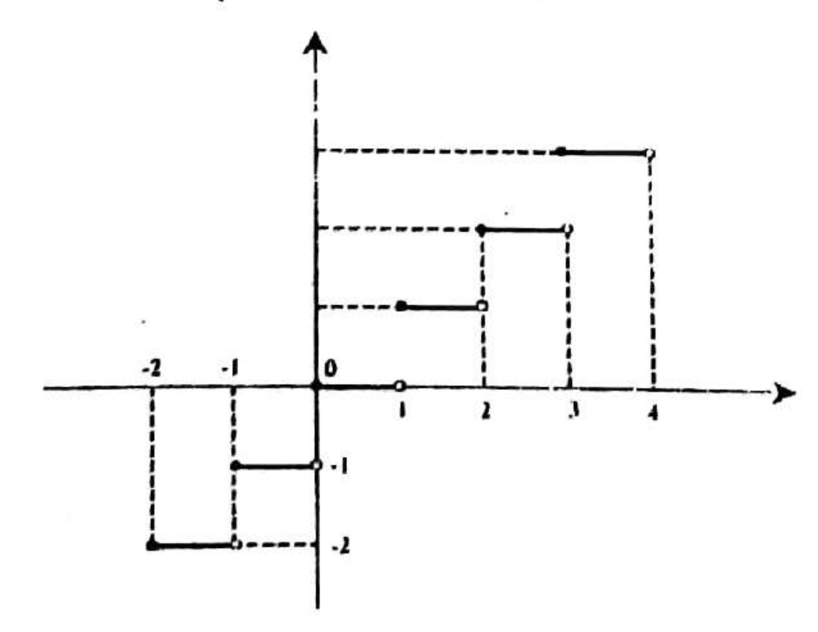
La función máximo entero es la función $f : R \rightarrow R$, tal que $f(x) = [\![x]\!]$

Evidentemente el rango de f es Z.

Podemos describir la función máximo entero de la siguiente manera:

$$f(x) = [\![x]\!] = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad -3 \leq x < -2 \\ -2 & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Su gráfica:



EJEMPLO 8

Hallar el rango y la gráfica de la función $f(x) = [[x]] - x, \quad x \in R$.

Solución:

Si x es entero $x = n$

$$f(n) = n - n = 0$$

si x no es entero y $n < x < n + 1$

$$f(x) = n - x \qquad \text{con } -1 \leq f(x) = n - x < 0$$

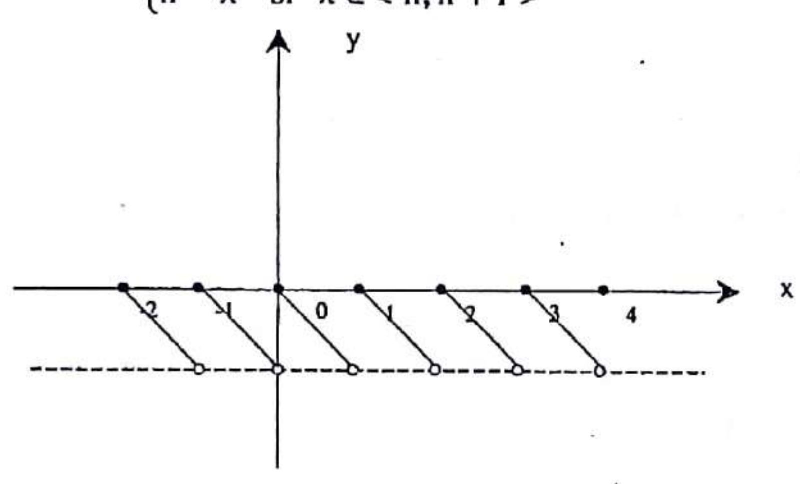
Por lo tanto

$$x \in R \text{ si y solo si } f(x) = 0 \ \vee \ -1 < f(x) < 0$$

Por lo tanto:

$$\text{Ranf} = <-1, 0]$$

Su gráfica: Como $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Z \\ n - x & \text{si } x \in < n, n+1 > \end{cases}$

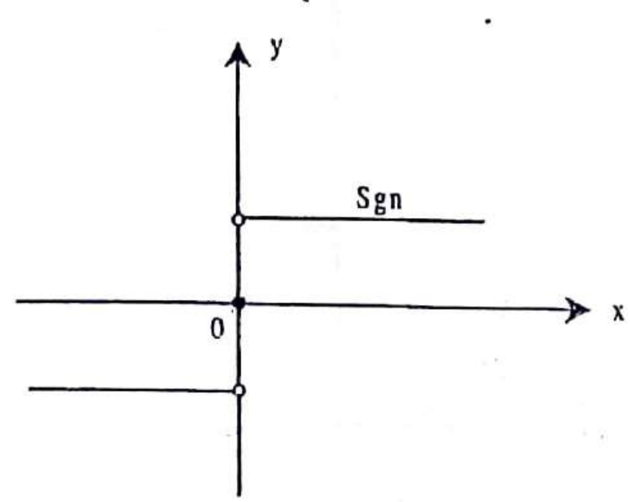


10. Función signo:

Es la función $f : R \to R$ con

$$f(x) = Sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Ran f = {-1,0,1}



4.4 ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES

Función par:

Una función f es función par si:

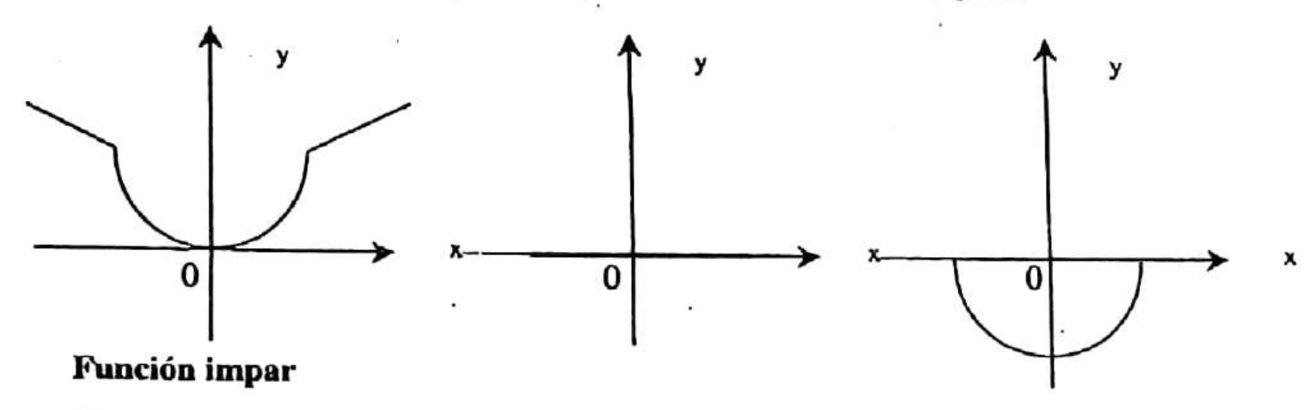
i) $x \in \text{Dom} f \rightarrow -x \in \text{Dom} f$

ii) $f(x) = f(-x), \ \forall \ x \in \text{Dom} f$

gráficamente f es simétrica respecto al eje y.

Así son funciones pares: $f(x) = |x|$, $x \in R$, n entero positivo, $f(x) = \cos x$, $x \in R$.

Las siguientes funciones expresadas gráficamente son funciones pares:



Función impar

Una función f se llama función impar si

i) $x \in \text{Dom} f \rightarrow -x \in \text{Dom} f$

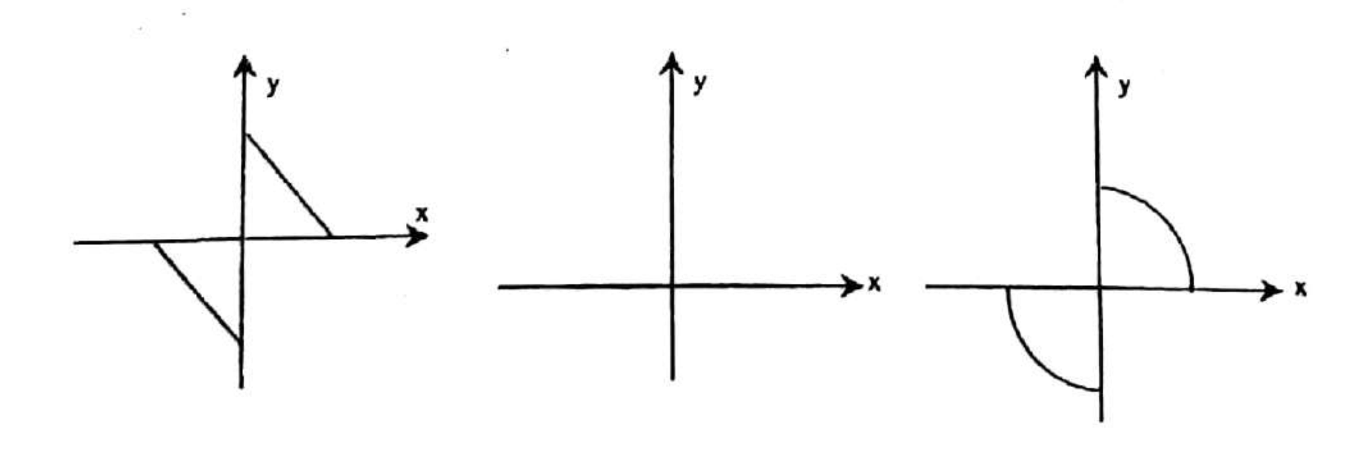
ii) $f(-x) = -f(x), \ \forall \ x \in \text{Dom} f$

Gráficamente f es simétrico respecto al origen.

Son funciones impares: $f(x) = x, x \in R$; $f(x) = x^3$, $x \in R$, $f(x) = \text{sen} x$, $x \in R$;

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

Las siguientes funciones expresadas gráficamente son funciones impares.



Función periódica:

Una función f es una función periódica si existe un número $T > 0$ tal que:

i) Si $x \in Domf$ entonces $x + T \in Domf$

ii) $f(x + T) = f(x), \forall x \in Dom f$.

el número T se llama período T.

Gráficamente una función periódica de período $T > 0$ repite su gráfico en cada intervalo de longitud T.

Además si $f(x) = f(x + T) = f((x + T) + T) = f((x + 2T) + T) = ...$

Son funciones periódicas $f(x) = senx$; $f(x) = cosx$ con período $T = 2\pi$, igualmente una función constante es función período un período cualquier valor $T > 0$.

EJEMPLO 1

Demostrar que la función

$$f(x) = x - [[x]], \quad x \in IR$$

es periódica de período $T = 1$.

Demostración:

Es fácil verificar $[[x - 1]] = [[x]] + 1, \ \forall x \in IR$

Entonces: $f(x) = x - [[x]]$ y $f(x + 1) = (x + 1) - [[x + 1]]$

$$= (x + 1) - ([[x]] - 1)$$

$$= f(x), \ \forall x \in IR$$

y ser período es $T = 1$.

Función creciente (Estrictamente creciente)

Una función f se dice que es creciente sobre un conjunto $D(D \subset Dom f)$ si cumple:

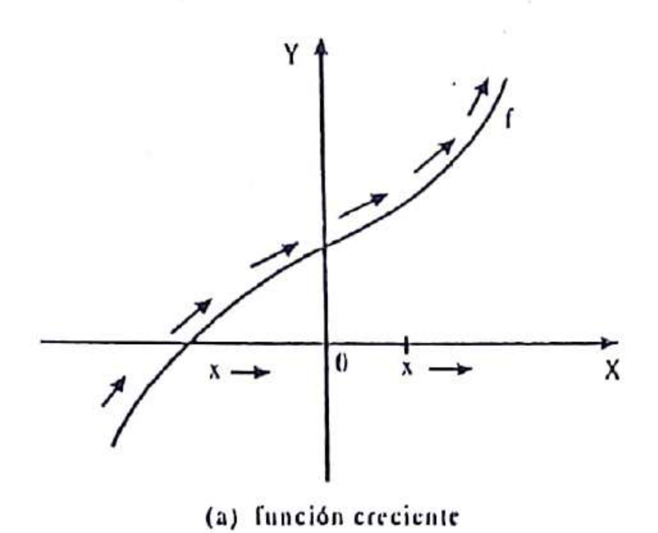
Función decreciente (Estrictamente decreciente)

Una función f se dice que es decreciente sobre un conjunto $D(D \subset Dom f)$ si cumple:

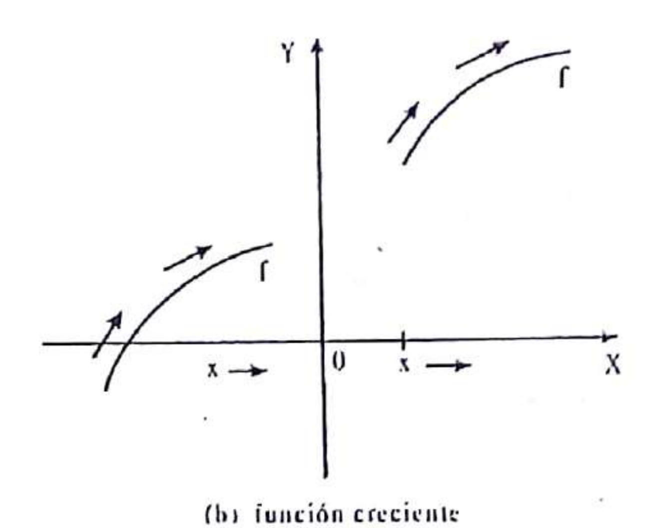
Si $\forall x_1, x_2 \in D$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.

Gráficamente una función f es creciente cuando al recorrer x el conjunto D de izquierda a derecha la gráfica sube o se eleva constantemente.

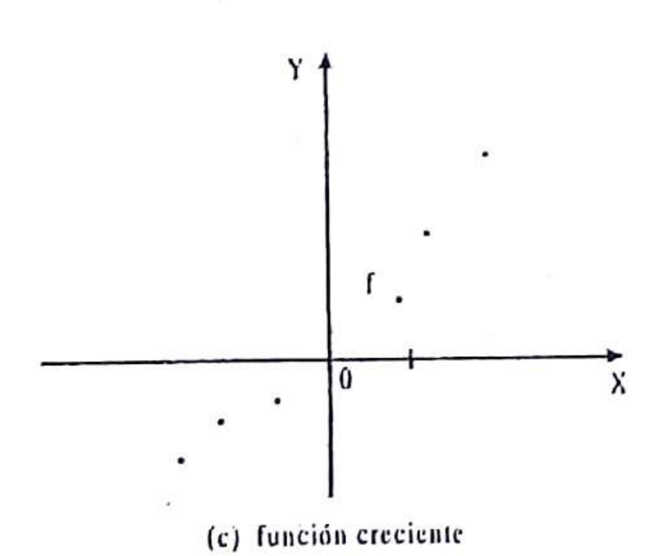
Análogamente f es decreciente cuando al recorrer x el conjunto D de izquierda a derecha la gráfica baja o declina constantemente.



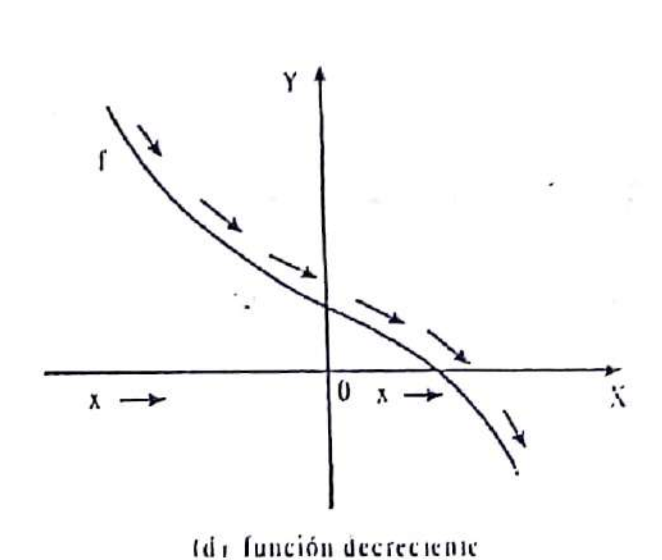
(a) función creciente



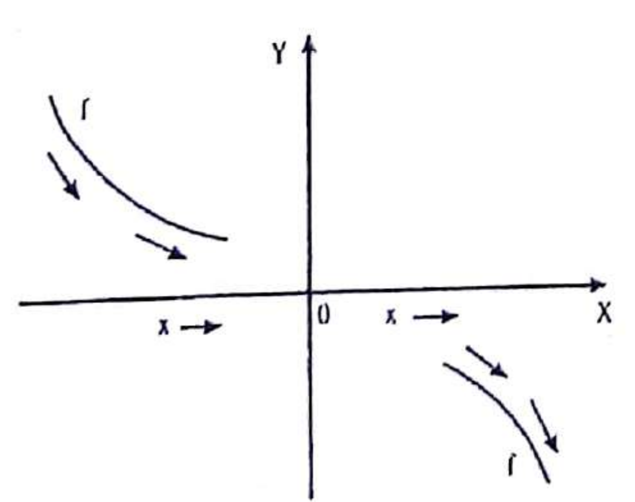
(b) función creciente



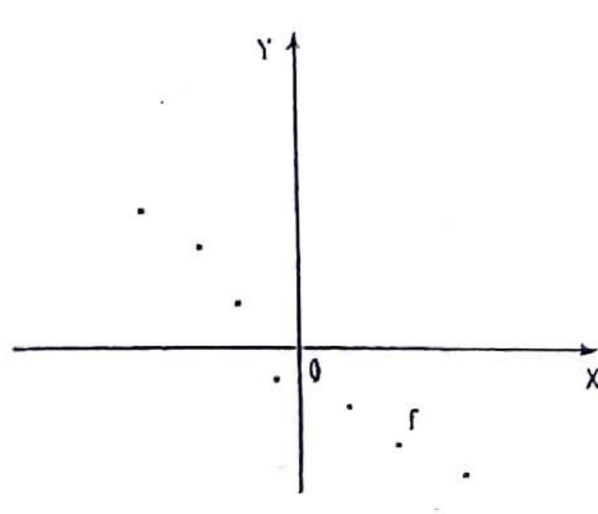
(c) función creciente



(d) función decreciente

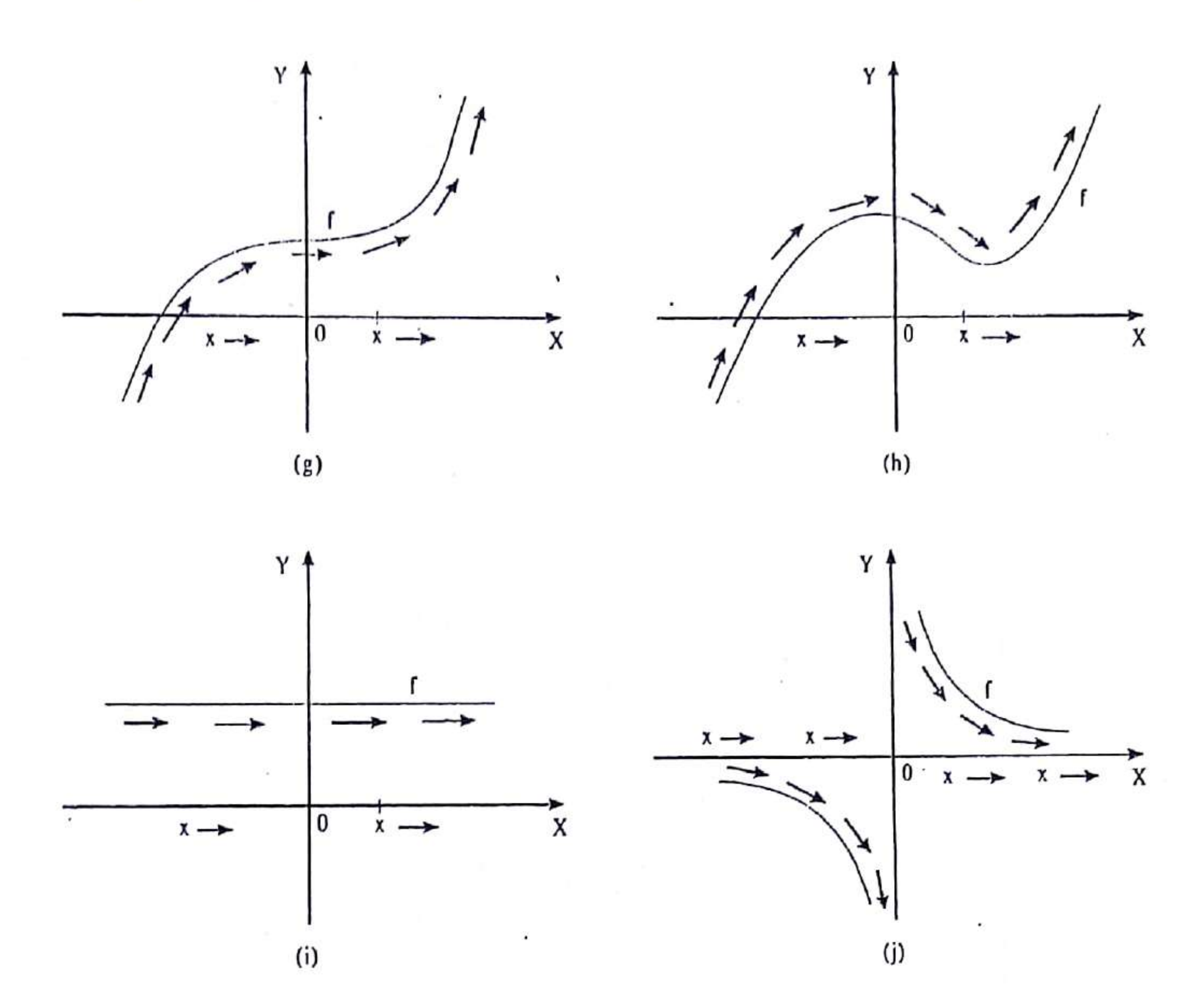


(e) función decreciente



(f) función decreciente

Las siguientes gráficas no son de funciones crecientes ni decrecientes.



Existen funciones como g), i) o la función máximo entero donde la gráfica sube (asciende) o se mantiene horizontal es decir, en ningún momento bajan (descienden), estas funciones suelen llamarse función no decreciente.

Es decir f es no decreciente si cumple:

$$\text{Si} \quad \forall\, x_1, x_2 \in D \qquad x_1 < x_2 \quad \text{entonces} \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

Análogamente existen funciones que bajan (descienden) o se mantienen horizontal, es decir, no suben (ascienden) en ninguna parte, ellas se llaman función no creciente.

Así f es no creciente si cumple:

$$\text{Si} \quad \forall\, x_1, x_2 \in D \qquad x_1 < x_2 \quad \text{entonces} \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

Se puede notar que cualquier función constante es no creciente y además no creciente.

Las funciones crecientes o decrecientes y estas dos últimas funciones se llaman funciones monótonas.

EJEMPLO 2

Demostrar que la función $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{x-10}{x-6}$ es creciente.

Demostración:

Como

$$f(x) = \frac{x-6-4}{x-6} = 1 - \frac{4}{x-6}$$

Sea x_1, x_2 en $[2, 5]$ tal que $2 < x_1 < x_2 < 5 \leftrightarrow -4 \leq x_1 - 6 < x_2 - 6 \leq -1 \leftrightarrow$

$$-1 \leq \frac{1}{x_2-6} < \frac{1}{x_1-6} \leq -\frac{1}{4} \leftrightarrow -4 \leq \frac{4}{x_2-6} \leq -1 \leftrightarrow 1 \leq -\frac{4}{x_1-6} \leq 4 \leftrightarrow$$

$$2 \leq 1 - \frac{4}{x_1-6} < 1 - \frac{4}{x_2-6} \leq 5 \leftrightarrow 2 \leq f(x_1) < f(x_2) < 5.$$

Por lo tanto f es creciente.

EJEMPLO 3

La función $f : \langle -\infty, 0] \to R$ es decreciente. Determinar el siguiente conjunto

$$F = \{x \in Domf \,/\, f(0) < f(x - |x| + 1)\}$$

Solución:

Siendo f decreciente cumple:

$$x_1 < x_2 \quad \text{entonces} \quad f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in Domf$$

Luego buscando todos los $x \in \langle -\infty, 0]$ tal que:

$$x - |x| + 1 < 0 \quad \text{implica} \quad f(x - |x| + 1) > f(0)$$

O sea determinando el conjunto

$$\{x \in \langle -\infty, 0] \,/\, x - |x| + 1 < 0\} = F$$

De $x - |x| + 1 < 0 \leftrightarrow x + 1 < |x| \leftrightarrow (x > x + 1) \vee (x < -x - 1)$

$$\leftrightarrow x < -x - 1$$

$$\leftrightarrow x < -1/2$$

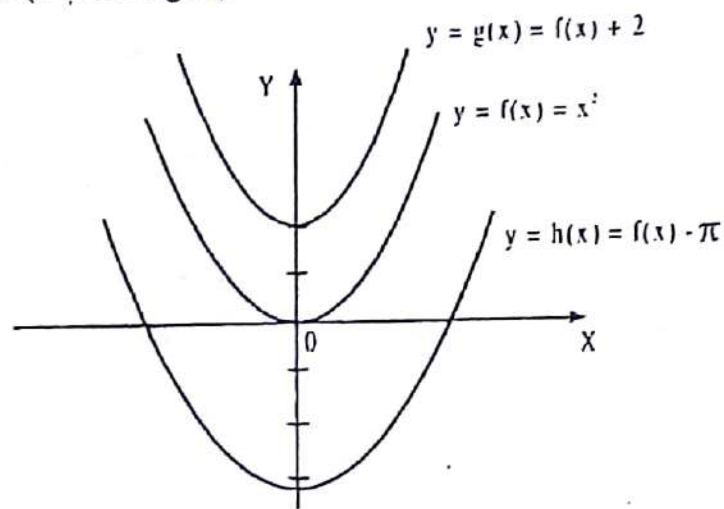
$$\therefore F = \langle -\infty, -1/2\rangle$$

4.5 TECNICAS DE GRAFICACIÓN

Traslaciones de la gráfica de y = f(x):

Caso 1: Traslación Vertical

Sea $g(x) = f(x) + k$. La gráfica de g se obtiene de la gráfica de f trasladando esta verticalmente k veces (k tiene signo).

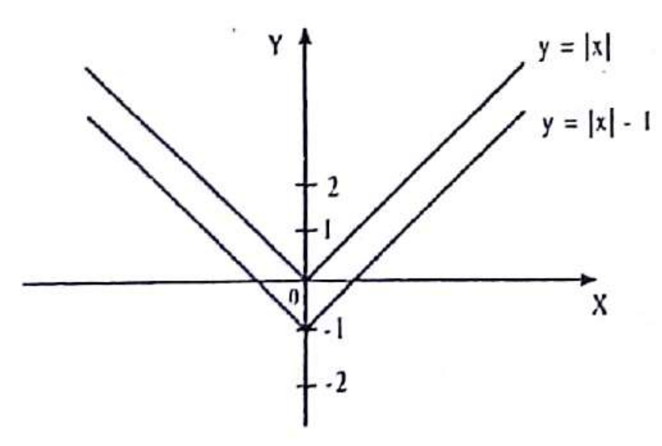


Regla:

En cualquier función (o relación), la sustitución de y por y – k donde k es una constante, traslada la gráfica verticalmente una distancia igual a $|k|$ si $k > 0$ la traslación es hacia arriba. Si $k < 0$ la traslación es hacia abajo.

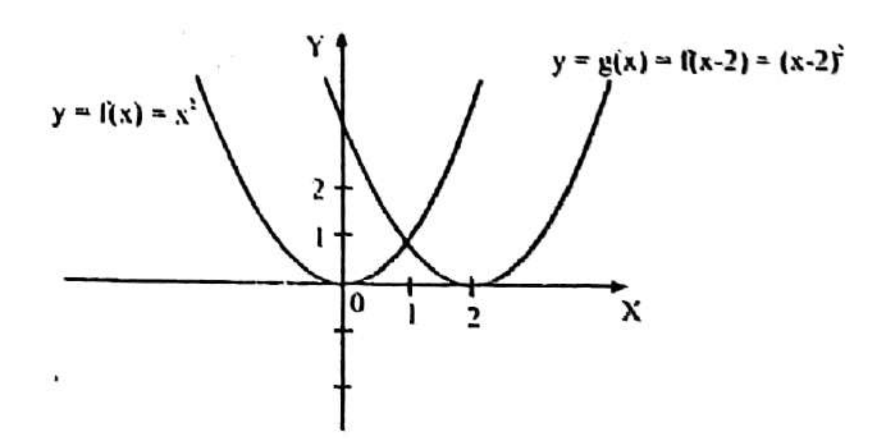
EJEMPLO 1

A partir de la gráfica de $y = f(x) = |x|$ obtener la gráfica $y = |x| - 1$.



Caso 2: Traslación horizontal

Sea $g(x) = f(x - h)$. La gráfica de g se obtiene de la gráfica de f trasladando esta horizontalmente h veces (k tiene signo)

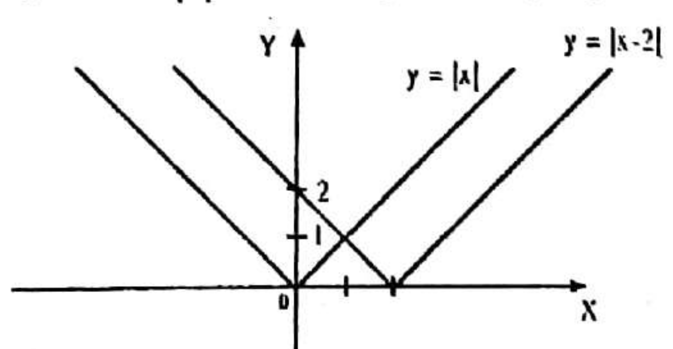


Regla:

En cualquier función (o relación), la sustitución de x por x − h donde h es una constante, equivale a trasladar la gráfica horizontalmente una distancia $|h|$. Si $h > 0$ la traslación es hacia la derecha. Si $h < 0$ la traslación es hacia la izquierda.

EJEMPLO 2

A partir de la gráfica de $y = f(x) = |x|$ obtener la gráfica de $y = g(x) = |x - 2|$.

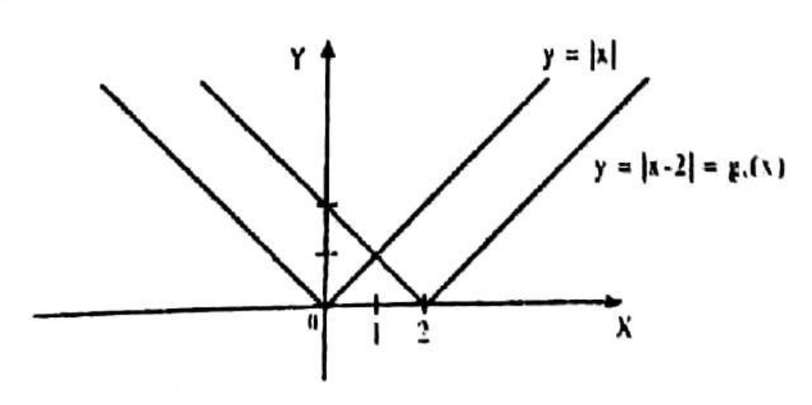


EJEMPLO 3

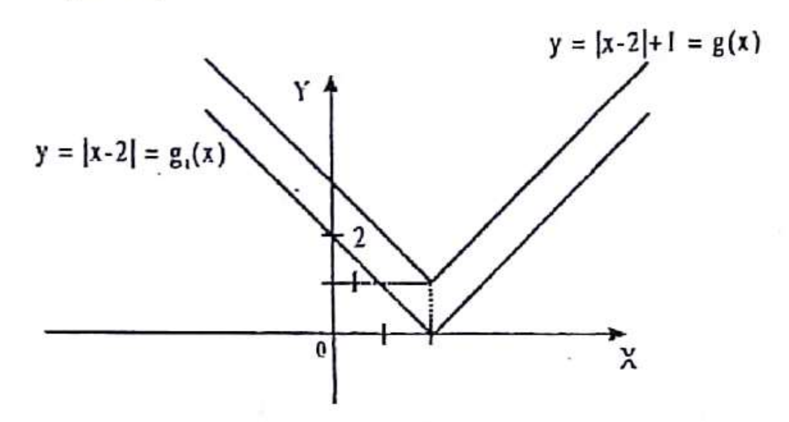
A partir de la gráfica de $y = f(x) = |x|$ obtener la gráfica de $y = g(x) = |x - 2| + 1$.

La solución es una aplicación sucesiva de los casos anteriores.

A partir de $y = |x| = f(x)$ primero graficamos $y = |x - 2| = g_1(x)$



luego a partir de la gráfica de $y = |x-2| = g_1(x)$ se obtiene de la función $y = g_2(x) = g_1(x) + 1 = |x-2| + 1$



se obtiene el mismo resultado si primero se grafica

$$y = f(x) + 1 \quad \text{y luego} \quad y = f(x-2) + 1$$

Caso 3: $g(x) = f(x-h) + k$.

Es una combinación de los casos 1 y 2 tomados en cualquier orden.

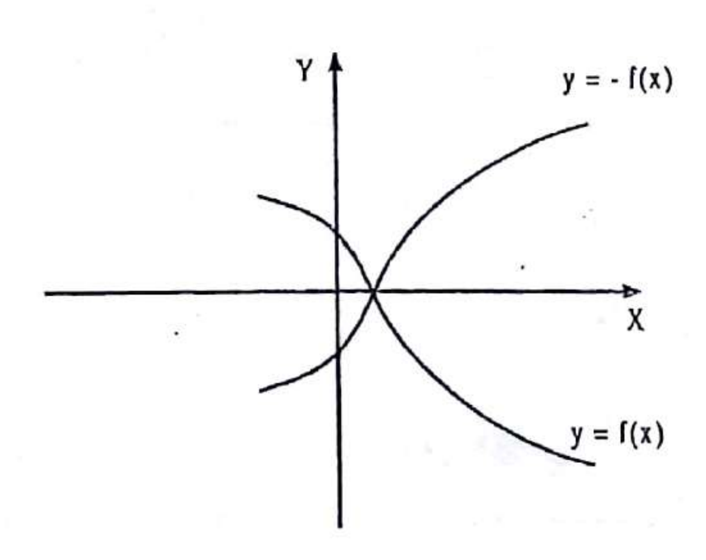
Gráficas simétricas de la gráfica de $y = f(x)$:

Sea la función $y = f(x)$ cuya gráfica se trata.

Caso 1: Graficar $y = -f(x)$.

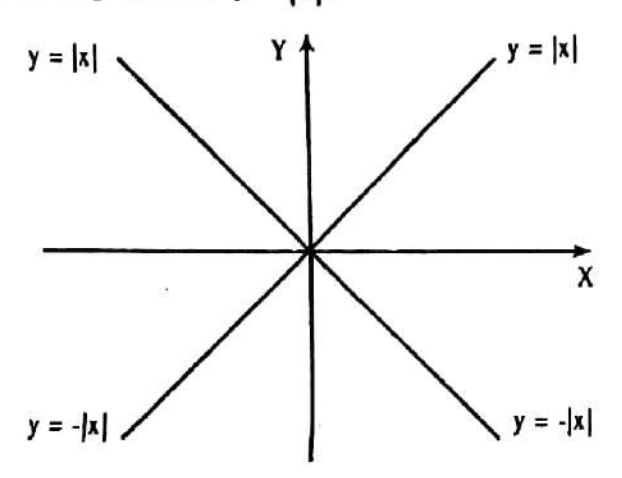
Esta gráfica se obtiene trazando la imagen simétrica, respecto al eje x, de la gráfica de $y = f(x)$.

Es decir, la gráfica de $y = -f(x)$ es la imagen de la gráfica de $y = f(x)$ respecto al "espejo" eje x.



EJEMPLO 4

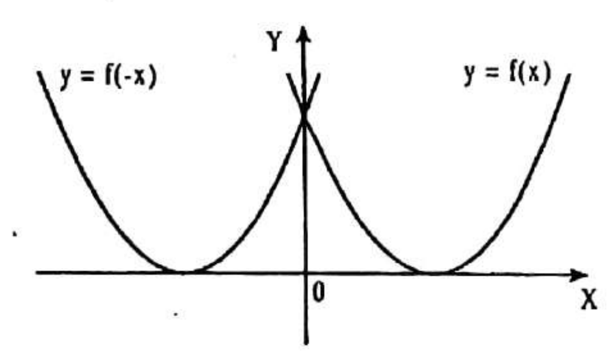
Graficar $y = |x|$ a partir de la gráfica de $y = |x|$.



Caso 2: Graficar $y = f(-x)$

Para obtener tal gráfica se traza la imagen simetría, respecto al eje y, de la gráfica de $y = f(x)$.

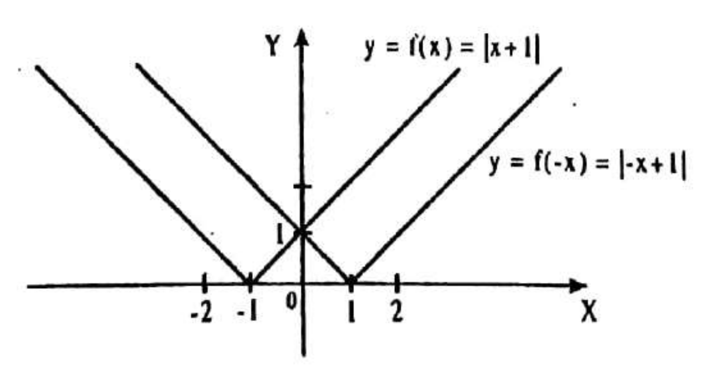
O sea, la gráfica de $y = f(-x)$ es la imagen de la gráfica de $y = f(x)$ respecto al "espejo" del eje y.



EJEMPLO 5

Trazar la gráfica de $y = |-x+1|$ a partir de la gráfica de $y = f(x) = |x+1|$

$y = f(x) = |x+1|$.



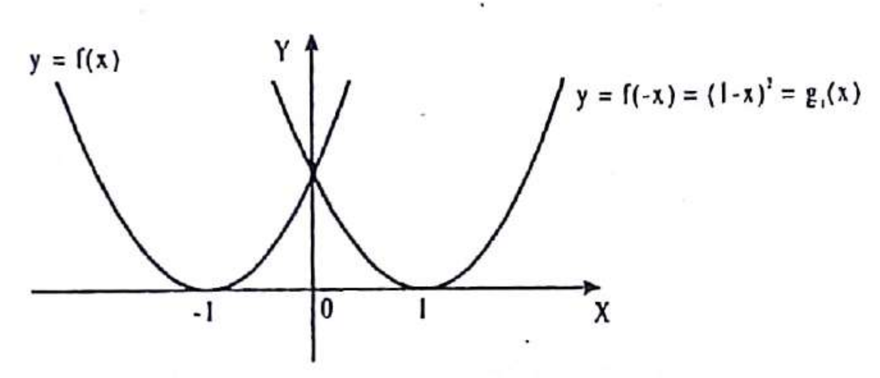
Caso 3: Graficar $y = -f(-x)$

Para obtener este gráfico se aplica los casos 1 y 2 uno tras otro sin interesar el orden.

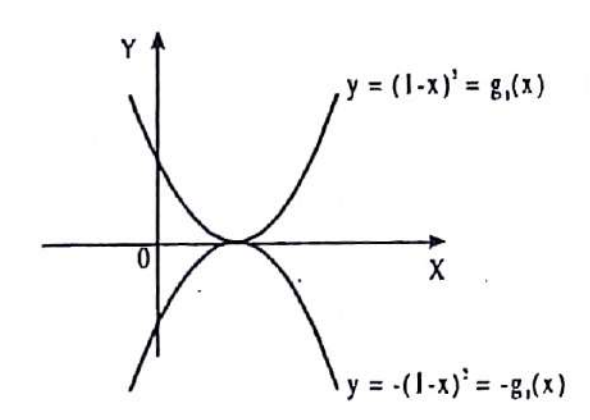
EJEMPLO 6

Graficar $y = -1(1 - x)^2$ a partir de $y = (x + 1)^2$.

Primero graficamos $y = (1 - x)^2$ tomando como punto de partida la gráfica de $y = f(x + 1)^2 = f(x)$, estamos en el caso 2 pues $y = (1 - x)^2 = f(-x) = g_1(x)$.



Luego graficamos $y = -(1 - x)^2$, estamos en el caso 1.



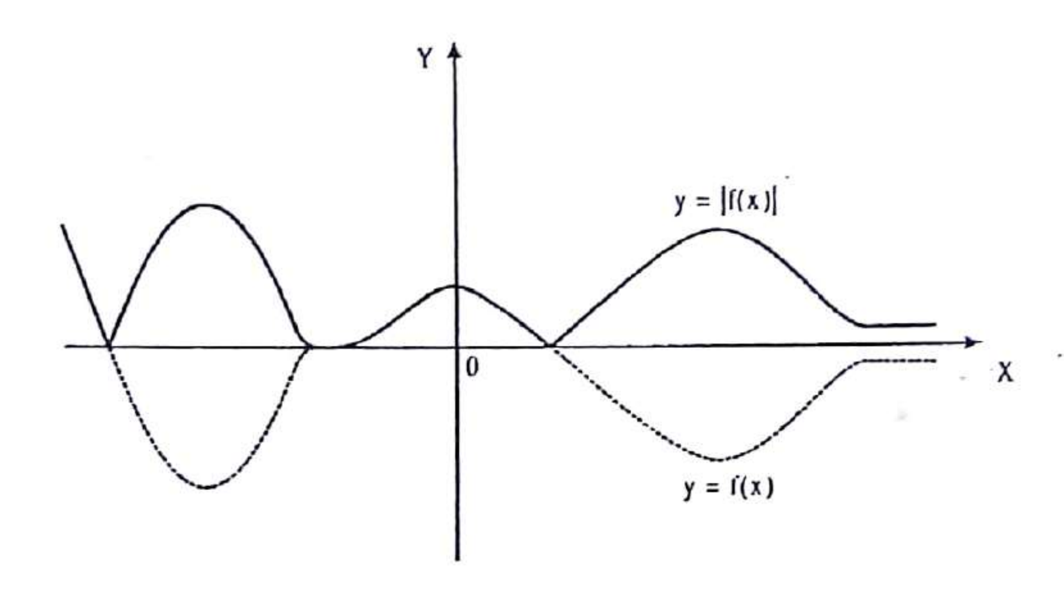
Caso 4: $y = |f(x)|$

Como $y = |f(x)|$ $\forall x \in$ Domf, su gráfica estará totalmente en el semiplano superior o sobre el eje y; $y \geq 0$.

Así para obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de $y = f(x)$ se procede de la siguiente manera:

i) Se mantienen la parte de la gráfica de f que está sobre el eje y o en el eje y.

ii) Se refleja, respecto al eje x, la parte de la gráfica de f que está debajo del eje y.



Caso 5: $y = f(|x|)$

Si $x \geq 0 \wedge x \in$ Domf entonces $f(|x|) = f(|-x|) = f(x)$ ...(1)

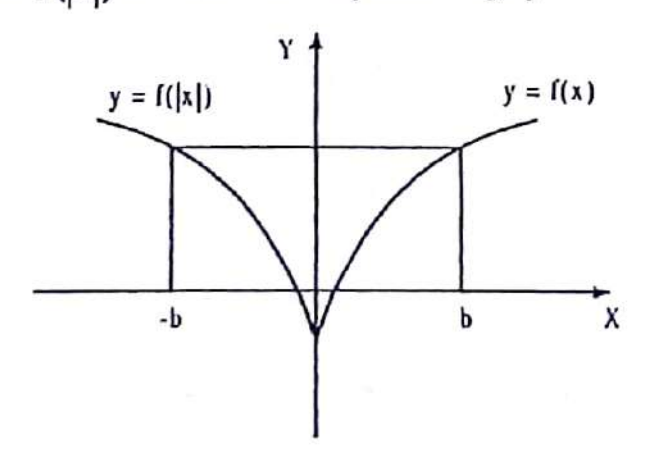
Si $x < 0 \wedge x \in$ Domf entonces $x < |x|$ y en general $f(x) \neq f(|x|)$ o no existe $f(|x|)$ ...(2)

Así la gráfica de $y = f(|x|)$ se obtiene de la siguiente manera:

i) Si $x \geq 0$ y $x \in$ Domf, la gráfica de $y = f(|x|)$ es exactamente la gráfica de $y = f(x)$ para este caso.

ii) Si $x < 0$ y $|x| \in$ Domf, la gráfica de $y = f(|x|)$ es la reflexión de la gráfica del caso i), respecto al eje y.

Es decir la gráfica de $y = f(|x|)$ es simétrico respecto al eje y

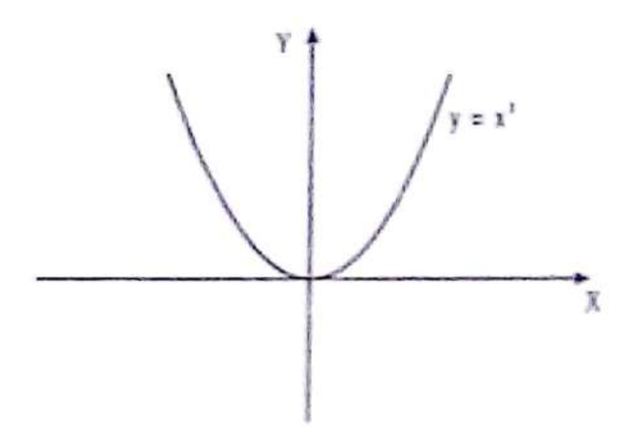


EJEMPLO 7

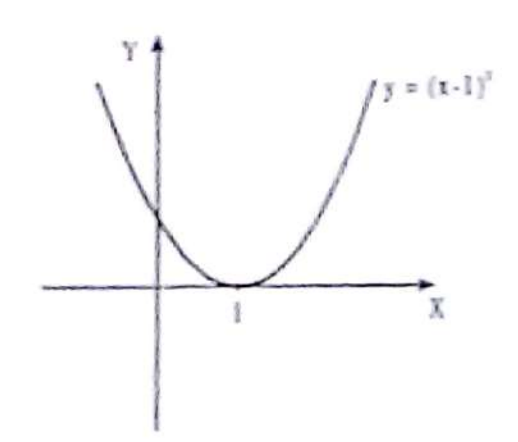
Hallar la gráfica de $y = -(|x|-1)^2$

Solución:

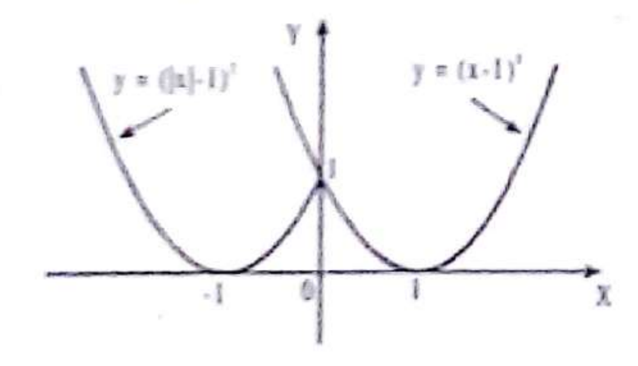
i) Inicialmente si la gráfica de $y = (x)^2$



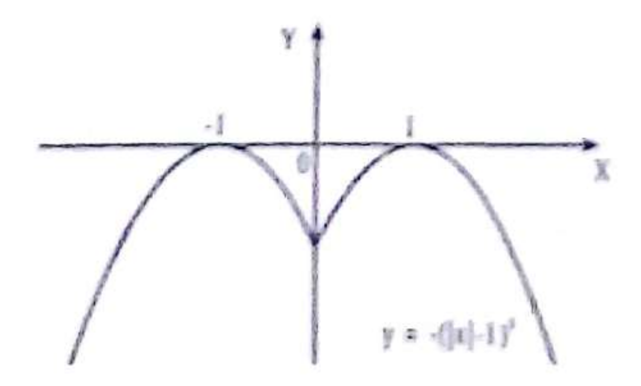
ii) Luego la gráfica de $y = (x-1)^2$



iii) en seguida la gráfica de $y = (|x|-1)^2$; $y(x-1)^2$



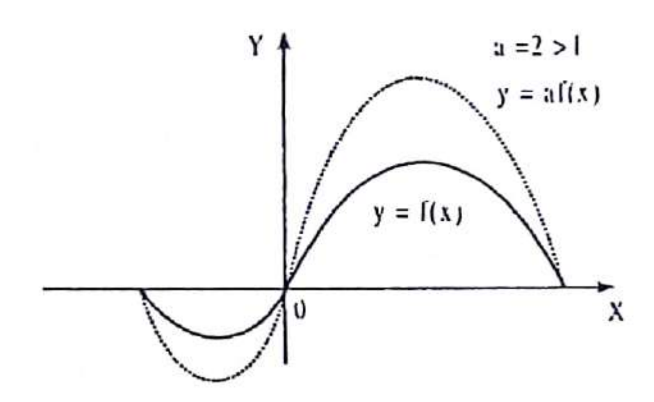
iv) finalmente se tiene la gráfica de $y = -(|x|-1)^2$



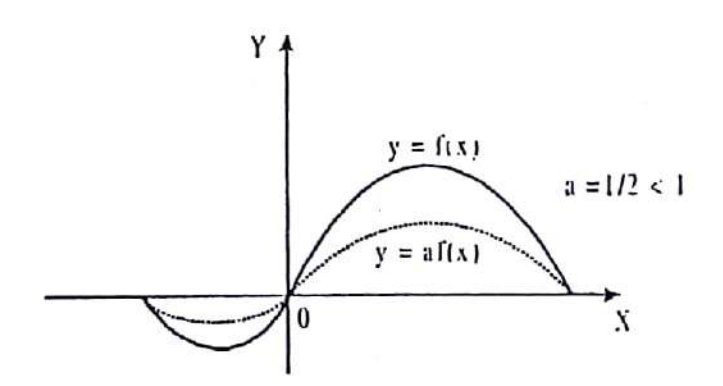
Dilatación o contracción de y = f(x)

Caso 1: $y = af(x)$, $a > 0$

Si $a > 1$, la gráfica de $y = af(x)$ es la dilatación (expansión) vertical de la gráfica de $y = f(x)$

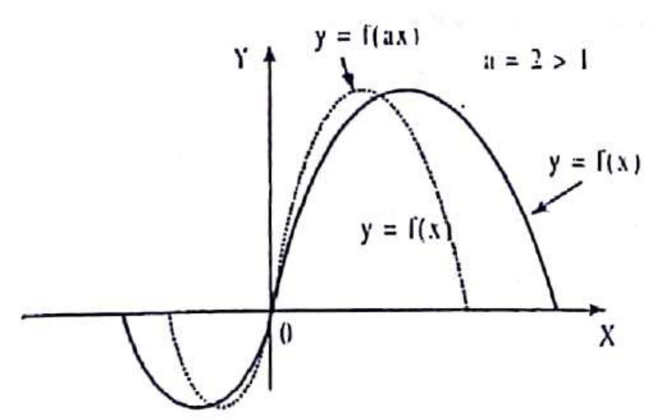


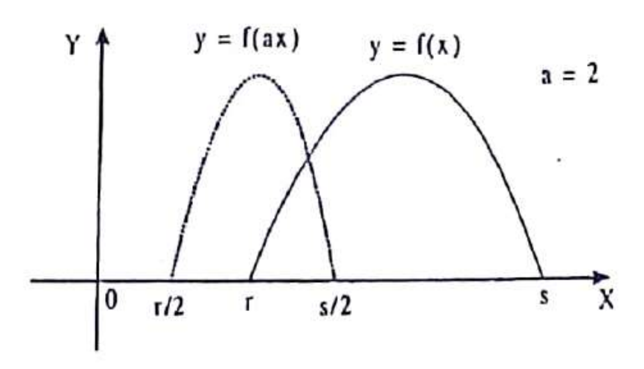
Si $0 < a < 1$, la gráfica de $y = af(x)$ es el encogimiento (contracción) vertical de la gráfica de $y = f(x)$



Caso 2: $y = f(ax)$, $a > 0$

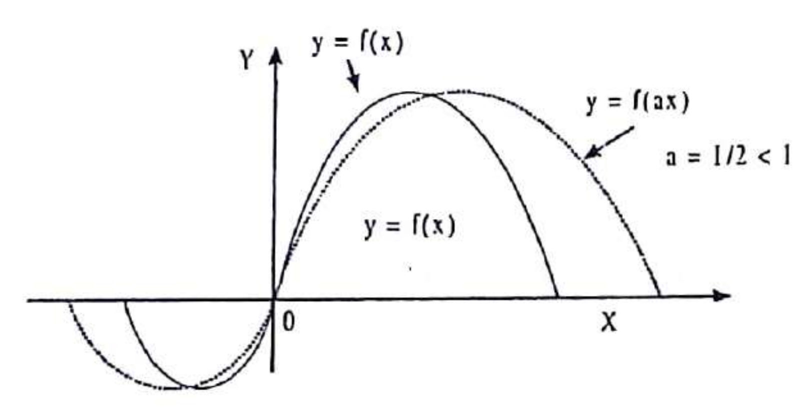
Si $a > 1$ la gráfica de $y = f(ax)$ es el encogimiento (contracción) horizontal de la gráfica de $y = f(x)$.

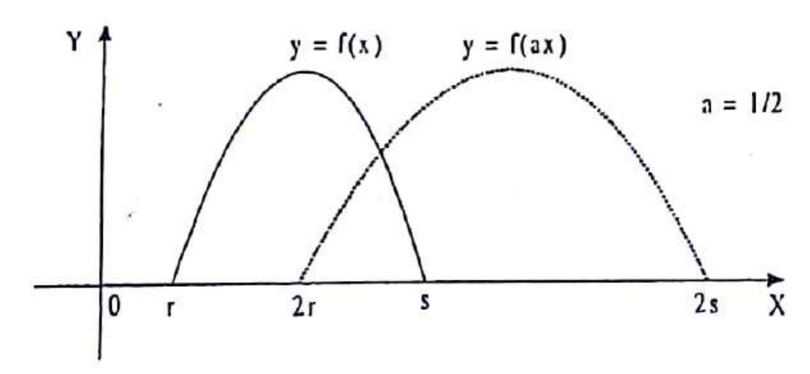




De la figura y = f(x), $r \leq x \leq s \Leftrightarrow y = f(ax)$, $r \leq a \leq s \Leftrightarrow M_a \leq x \leq s/a$

Si $0 < a < 1$; la gráfica de y = f(ax) es la dilación (expansión) horizontal de la gráfica de y = f(x)





De la figura y = f(x), $r \leq x \leq s \Leftrightarrow y = f(ax)$, $r \leq ax \leq r \Leftrightarrow \frac{r}{a} \leq x \leq \frac{s}{a}$

4.6 OPERACIONES CON FUNCIONES

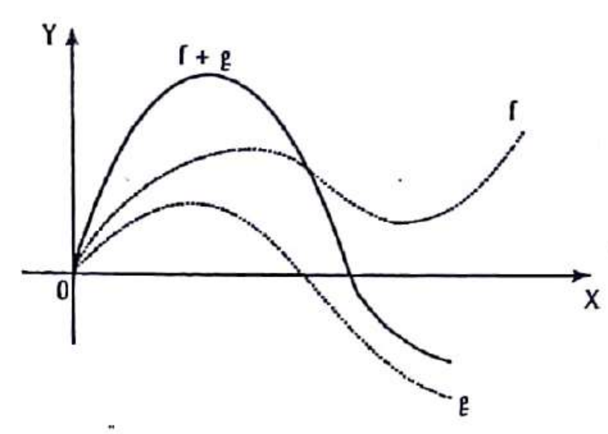
Suma de funciones

Si f y g son dos funciones reales de variable real con dominios Domf y Domg se puede definir una nueva función llamada función suma f + g con:

i) $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$

ii) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

o sea, $f + g = \{(x, f(x) + g(x)) / x \in Domf \cap Domg\}$



Multiplicación de funciones

Si f y g son dos funciones reales de variable real con dominios Domf y Domg se puede definir una nueva función llamada función multiplicación f . g con:

i) $Dom(f\,g) = Domf \cap Domg$

ii) $(f\,g)(x) = f(x)g(x)$

EJEMPLO 1

$f = \{(x, x^2) / x \in \mathbb{R}\}$ $g = \{(x, 2) / x \in \mathbb{R}\}$

$gf = 2f = \{(x, 2x^2) / x \in \mathbb{R}\}$

DEFINICIÓN 1

Si f es una función real de variabilidad, -f es la función con dominio Domf y regla de correspondencia

$$(-f)(x) = -f(x)$$

o sea, $-f = (-1)f$

Resta de funciones

Si f y g son funciones reales de variables reales entonces la resta de f y g, f – g es la función: $f - g = f + (-g)$

DEFINICIÓN 2

Si f es una función real de variable real, entonces $\frac{1}{f}$ es la función con dominio $Dom\frac{1}{f}\{x \in Domf / f(x) \neq 0\}$ y regla de correspondencia: $\left[\frac{1}{f}\right](x) = \frac{1}{f(x)}$

Notación $\frac{1}{f} = f^{-1}$.

De esto debe notarse:

1. $f - f = 0$ si y sólo si $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

2. $f \cdot \dfrac{1}{f} = 1$ si y sólo si $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ y $f(x) \neq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

División de funciones

Si f y g son funciones reales de variable real, la división o cociente de f y g, f/g es la función

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

también

$$\frac{f}{g} = f \cdot g^{-1}$$

Observaciones:

1. Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones reales de variables reales, entonces: $f = f_1 + \ldots + f_n$ es la función que cumple:

$$f(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$$

$$\text{Dom}f = \text{Dom}f_1 \cap \ldots \cap \text{Dom}f_n$$

y $g = f_1\, f_2 \ldots f_n$ es la función:

$$g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \ \ldots f_n(x)$$

$$\text{Dom}g = \text{Dom}f_1 \cap \ldots \cap \text{Dom}f_n(x)$$

2. $f + f + \ldots + f = f \cdot 1 + f \cdot 1 + \ldots + f \cdot 1 = f(1 + \ldots + 1) = nf.$

$f \cdot f \ldots f = f^n, \quad n \in N$

3. Si

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ con } x \in A \\ f_2(x) \text{ con } x \in A_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x) \text{ con } x \in B \\ g_2(x) \text{ con } x \in B_2 \end{cases}$$

entonces

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f_1(x) + g_1(x) & \text{si} \quad x \in A_1 \cap B_1 \neq \phi \\ f_1(x) + g_2(x) & \text{si} \quad x \in A_1 \cap B_2 \neq \phi \\ f_2(x) + g_1(x) & \text{si} \quad x \in A_2 \cap B_1 \neq \phi \\ f_2(x) + g_2(x) & \text{si} \quad x \in A_2 \cap B_2 \neq \phi \end{cases}$$

EJEMPLO 2

Dadas las funciones:

$$f = \{-1, 2\}, (1, 6), (6, 3), (-2, 5), (0, 3), (2, 8)$$

$$g = \{(1, 1), (-2, 10), (0,0), (7, 8), (2, 2), (-1, 0)\}$$

Calcular: $f + g$, $f \cdot g$ y f/g

Solución:

$Domf = \{-1, 1, 6, -2, 0, 2\}$ y $Domg = \{1, -2, 0, 7, 2, -1\}$ entonces $Domf \cap Domg = \{-1, 0, 1, 2, -2\}$ así:

$$f+g=\{(-1,2+0),(0,3+0),(1,6+1),(2,8+2),(-2,5+10)\}=\{(-1,2),(0,3)(1,7),(2,10),(-2,15)\}$$

$$f\,g=\{(-1,2.0),(0,3.0),(1,6.1),(2,8.2),(-2,5.10)\}=\{(-1,0),(0,0)(1,6),(2,16),(-2,50)\}$$

Además: $$Dom\frac{1}{g} = \left\{\left(1,\frac{1}{1}\right)\left(-2,\frac{1}{10}\right)\left(7,\frac{1}{8}\right)\left(2,\frac{1}{2}\right)\right\}$$ y

$$Domf \cap Dom\frac{1}{g} = \{1, -2, 2\}, \text{ luego}$$

$$\frac{f}{g} = f.\frac{1}{g} = \left\{\left(1, 6.\frac{1}{1}\right),\left(-2, 5.\frac{1}{10}\right),\left(2, 8.\frac{1}{2}\right)\right\} = \left\{(1,6),\left(-2,\frac{1}{2}\right),(2,4)\right\}$$

EJEMPLO 3

Sean las funciones:

$$f = \{(0, 0)\ (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (6, 10)\}$$

$$g(x) = \sqrt{x+2}\ ,\ x \in \langle -2, 2\rangle$$

si $(g^2 + f)(n) = 3$ halle $n^2 + 2$.

Solución:

Consideremos $Domg = Dg$

$g^2(x) = x + 2$, $Dg^2 = Dg = \langle -2, 2\rangle$

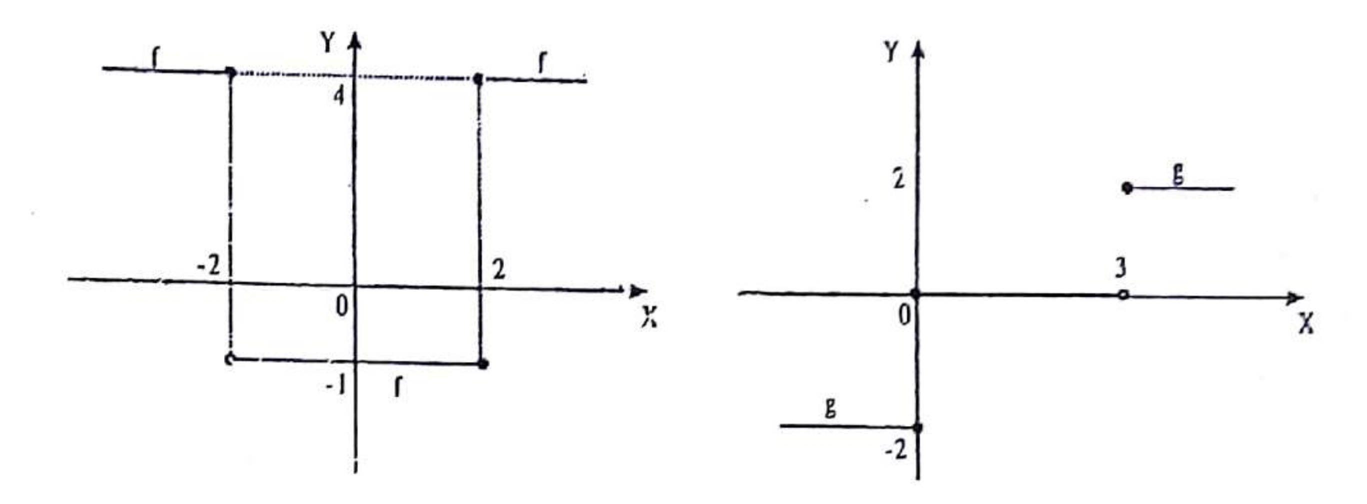
$Dom\, f = Df = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ luego $D(g^2 + f) = \{0, 1\}$

Así: $g^2 + f = \{(0, g^2(0) + 0), (1, g^2(1) + 0)\} = \{(0, 2), (1, 3)\}$

$$\therefore n = 1 \quad \text{y} \quad n^2 + 2 = 3$$

EJEMPLO 4

Dadas las funciones f y g gráficamente, hallar (f – g)(-2) + (f g)(2)



Solución:

$$(f - g)(-2) + (f \cdot g)(2) = f(-2) - g(-2) + f(2)g(2)$$

$$= 4 - (-2) + (-1)(0) = 6$$

EJEMPLO 5

Sean las funciones

$$f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$$

entonces

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} x / x, & x \geq 0 \wedge x \geq 2 \wedge x \neq 0 \\ x / x^2, & x \geq 0 \wedge x < 2 \wedge x^2 \neq 0 \\ -x / x, & x < 0 \wedge x \geq 2 \wedge x \neq 0 \quad \text{no existe} \\ -x / x^2, & x < 0 \wedge x < 2 \wedge x^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x \in [2, \infty > \\ 1 / x, & x \in < 0, 2 > \\ -1 / x, & x \in < -\infty, 0 > \end{cases}$$

Composición de funciones

En esta operación no es necesario que las funciones sean reales de variable real.

DEFINICIÓN 3

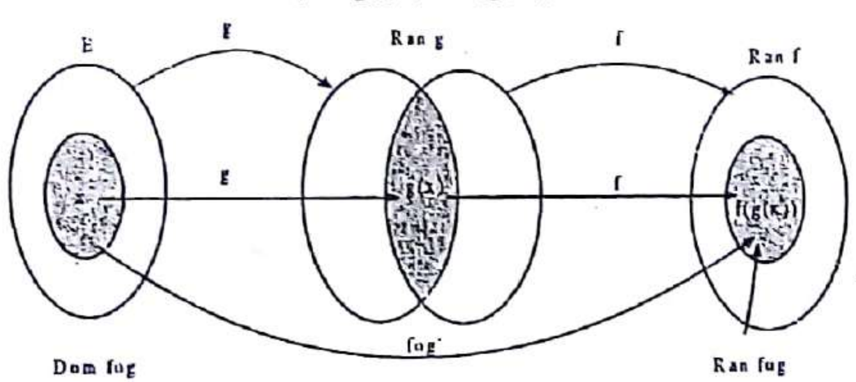
Sean las funciones: $f : A \rightarrow Ranf$,

$g : B \rightarrow Rang$

si $Rang \cap A \neq \phi$ es posible formar una tercera función llamado la composición de f con g, f o g, cuya definición es

$$Dom(f \circ g) = \{x / x \in Domg = B \wedge g(x) \in Ranf\} \quad y$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



EJEMPLO 6

Dadas las funciones: $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$

$g = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$

Hallar el producto de los elementos del rango de la función

$$h = (f \circ g) + (g \circ f)$$

Solución:

En este caso es posible seguir el siguiente procedimiento.

En caso de f o g: $\underbrace{(x, g(x))}_{\in g} \wedge \underbrace{(g(x), f(g(x))}_{\in f}$ entonces $(x, f(g(x)) \in f \circ g$

y en caso g o f: $\underbrace{(x, f(x))}_{\in f} \wedge \underbrace{(f(x), g(f(x))}_{\in g}$ entonces $(x, g(f(x)) \in g \circ f$

así:

Para f o g: $(1, 2) \in g \wedge (2, 3) \in f \Rightarrow (1, 3) \in f \circ g$

$(0, 3) \in g \wedge (3, 5) \in f \Rightarrow (0, 5) \in f \circ g$

$(2, 1) \in g \wedge (4, 2) \in f \Rightarrow (2, 2) \in f \circ g$

$(3, 4) \in g \wedge (4, 7) \in f \Rightarrow (3, 7) \in f \circ g$

por consiguiente $f \circ g = \{(1, 3), (0, 5), (2, 2), (3, 7)\}$

Para $g \circ f$: $(1, 2) \in f \wedge (2, 3) \in g \Rightarrow (1, 3) \in g \circ f$

$(2, 3) \in f \wedge (3, 4) \in g \Rightarrow (2, 4) \in g \circ f$

Para $x = 3$ $f(3) = 5 \notin Dg \Rightarrow$ no existe $g(f(3))$

$x = 4$ $f(4) = 7 \notin Dg \Rightarrow$ no existe $g(f(4))$

por lo tanto $g \circ f = \{(1, 1), (2, 4)\}$

Como $D_{f \circ g} \cap D_{g \circ f} = \{1, 2\} = Dh$ entonces

$h = (f \circ g) + (g \circ f) = \{(1, 3 + 1), (2, 2 + 4)\} = \{(1, 4), (2, 6)\}$

$R_h = \{4, 6\}$ entonces $4 \cdot 6 = 24$

Función Inyectiva

DEFINICION 4

Sea f una función de A en B ($f : A \to B$) se dice que f es una función inyectiva o univalente (uno a uno) si para todo x_1 y x_2 en el dominio de f se verifica:

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ implica } x_1 = x_2 \qquad \ldots(1)$$

o equivalentemente

$$\text{si} \quad x_1 \neq x_2, \text{ entonces } f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \ldots(2)$$

(1) Equivale a decir que cada elemento del rango es imagen de un único elemento del dominio.

(2) Equivale a decir que para valores diferentes en el dominio les corresponden valores diferentes en el rango.

EJEMPLO 7

Determinar si las funciones:

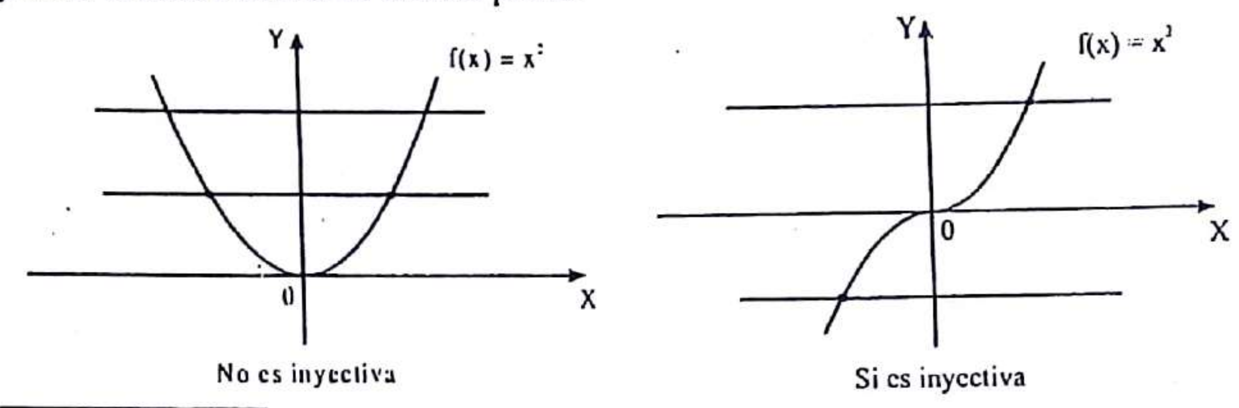
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ son univalentes.

Solución:

a) Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ ó $x_1 = -x_2$ así no se satisface (1), luego f no es univalente.

a) Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$ se verifica (1) luego f es univalente.

Las funciones univalentes se caracterizan por que una recta horizontal, si intersecta a su gráfica, lo hace a lo más en un solo punto.



No es inyectiva   Si es inyectiva

EJEMPLO 8

Sea la función $f(x) = -x^2 - 4x - 3$, si $x \geq -2$ determinar si f es univalente.

Solución:

Hagamos $f(x_1) = f(x_2)$. Si la única solución de esta ecuación es $x_1 = x_2$ entonces f será univalente. Así,

$$\text{Si} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1^2 - 4x_1 - 3 = -x_2^2 - 4x_2 - 3$$
$$\Rightarrow x_2^2 - x_1^2 + 4x_2 - 4x_1 = 0$$
$$\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 4) = 0$$
$$\Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \text{ ó } x_1 + x_2 + 4 = 0$$

Si $x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ (1)

Veamos si se verifica $x_1 + x_2 + 4 = 0$ como $x_1 \geq 2$ y $x_2 \geq 2 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq -4$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + 4 \geq 0$$

Así parece que puede ser que $x_1 + x_2 + 4 = 0$. Pero esto se obtiene solo si ambos x_1 y x_2 son iguales a –2. Entonces $x_1 = x_2 = -2$, verifica (1) por lo que f es univalente, ya que en cualquier otro caso: $x_1 + x_2 + 4 > 0$.

Función sobreyectiva

DEFINICION 5

Sea f una función tal que: $f : A \rightarrow B$ se dice que f es una función sobreyectiva si todo elemento de B pertenece al rango de f. Es decir, $Rf = B$, se dice también que f es una función de A sobre B.

EJEMPLO 9

Si $f : [-3, 3] \rightarrow [0, 9] \,/\, f(x) = x^2$ f es sobreyectiva ya que

$$-3 \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9 \Rightarrow Rf = [0, 9] = B$$

EJEMPLO 10

Si $f : \langle -\infty, 1] \to [2, \infty\rangle$ es una función decreciente (estrictamente decreciente) y suryectiva tal que $f(x) = \dfrac{ax + b}{2}$, $\forall\ x \leq 1$ y $f(0) = -a$. Hallar $b - a$.

Solución:

Como f es suryectiva $R_f = B = [2, \infty\rangle$ como f es decreciente: $f(1) = 2$ por qué?

Resolvemos
$$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a + b}{2} = 2 \Rightarrow a + b = 4$$
$$f(0) = -a \Rightarrow \frac{b}{2} = -a \Rightarrow b = -2a$$
$$\Rightarrow a = 4 \quad b = 8$$

Piden $b - a = 8 - (-4) = 12$.

EJEMPLO 11

La función $f : [-1, 3] \to B$ con $f(x) = |2x| - x + 1$ es sobreyectiva (suryectiva) entonces se pide hallar B.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x \leq 3 \\ -3x + 1, & -1 \leq x < 0 \end{cases} \qquad \text{¿por qué?}$$

Como f es suryectiva $Rf = Rf_1 \cup Rf_2$.

Si $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq x + 1 \leq 4 \Rightarrow Rf_1 = [1, 4]$

Si $-1 \leq x < 0 \Rightarrow 3 \geq -3x > 0 \Rightarrow 4 \geq -3x + 1 > 1 \Rightarrow Rf_2 = \langle 1, 4]$

$$Rf = [1, 4] \cup \langle 1, 4] = [1, 4]$$

Nota: **Toda función f es sobreyectiva sobre su rango.**

EJEMPLO 12

Calcular B para que $f(x) = (x^2 + 2x + 4)$ sea sobreyectiva en $-2 \leq x \leq 2$.

Solución:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x + 1)^2 + 3$$

$$-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -9 \leq x + 1 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq (x + 1)^2 \leq 9 \Rightarrow 3 \leq (x + 1)^2 + 3 \leq 1$$

$$\Rightarrow B = Rf = [3, 12]$$

Función biyectiva

DEFINICION 6

Una función que va de A en B, ($f : A \rightarrow B$) se dice que es biyectiva o biyección si y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva.

EJEMPLO 13

Sea $f : [2, 4] \rightarrow A,\ f(x) = 1 - 2x$ biyectiva y

$g : A \rightarrow B,\ g(x) = \dfrac{7}{x+1}$ igualmente biyectiva

calcular B.

Solución:

Como f es biyectiva Ranf = A

$$2 \le x \le 4 \Rightarrow -4 \ge -2x \ge -8 \Rightarrow -3 \ge -2x + 1 \ge -7 \Rightarrow A = [-7, -3]$$

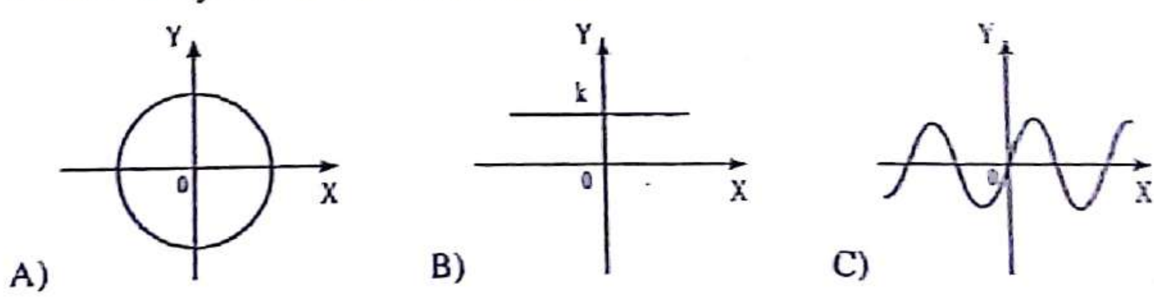
como g es biyectiva Rang = B

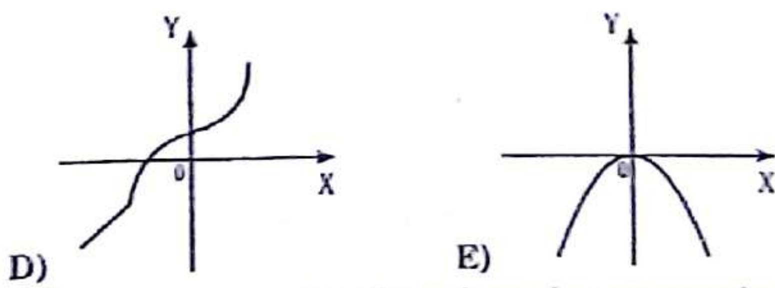
$$-7 \le x \le -3 \Rightarrow -6 \le x + 1 \le -2 \Rightarrow -\frac{1}{6} \ge \frac{1}{x+1} \ge -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{2} \le \frac{7}{x+1} \le -\frac{7}{6} \Rightarrow B = \left[-\frac{7}{2}, -\frac{7}{6}\right].$$

EJEMPLO 14

¿Cuál función es biyectiva? Dominio común: R





Rpta. Por definición es la que corresponde a D (es inyectiva y suryectiva a la vez).

4.7 INVERSA DE UNA FUNCION

DEFINICION 7

Dada la función f de A en B ($f: A \rightarrow B$) f biyectiva es decir:

$$f = \{(x, y) / y = f(x),\ x \in A,\ y \in Rf = B\}$$

se define la función inversa de f denotada por f^* que va de B en A($f^*: B \rightarrow A$), f^* biyectiva como:

$$f^* = \{(y, x) / x = f^*(y);\ x \in A,\ y \in B\}$$

si f no fuese biyectiva habría que hacer las restricciones del caso para que exista f^*.

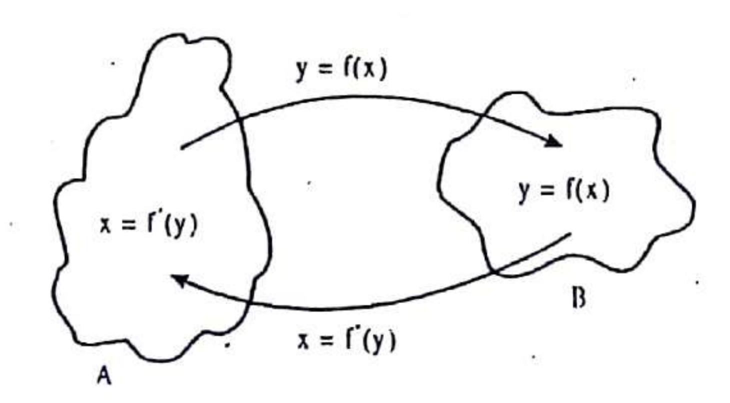
EJEMPLO 1

$f(x) = x^2 / f: R \rightarrow R$ no es biyectiva luego no posee inversa.

EJEMPLO 2

$f(x) = x^2 / f: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ si es biyectiva luego posee inversa.

Gráficamente:



Observar que:

i) Si $(x, y) \in f \Rightarrow (y, x) \in f^*$

ii) $Df = A = Rf^*,\ Rf = B = Df^*$

iii) $f^*(f(x)) = f^*(y) = x$

$f(f^*(y)) = f(x) = y$

Esta propiedad será el sustento teórico para propiedades que Ud. verá más adelante como

i) $\log_a a^x = x$ ii) $a^{\log_a x} = x$

para dos funciones llamadas exponencial y logaritmo que son inversas una de la otra.

EJEMPLO 3

Sea $f = \{(2, 0), (3, 1), (4, 2)\}$ es biyectiva

Entonces $f^* = \{(0,2), (1, 3), (2, 4)\}$

EJEMPLO 4

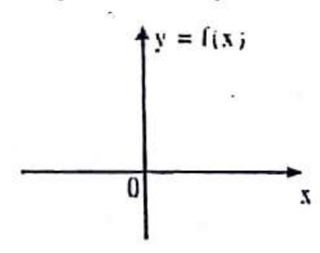
Sea $f(x) = 3x + 1 \,/\, f: R \rightarrow R$ es biyectiva

Entonces $y = 3x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{3} = f^*(y)$ es su inversa

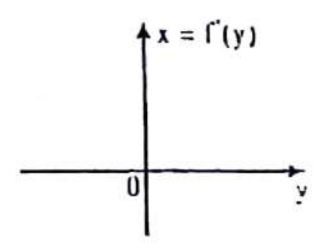
Se tiene $y = f(x) = 3x + 1 \,/\, f: R \rightarrow R$

$$x = f^*(y) = \frac{y-1}{3} \Big/ 3\left(\frac{y-1}{3}\right) + 1 = y$$

Para el lector curioso habrá observado que estamos en dos planos coordinados diferentes es decir en $y = f(x)$, x depende de y tenemos plano XY:



$x = f^*(y)$, y depende de x tenemos plano YX:



Si deseamos comparar ambas funciones tendríamos dificultad de análisis por lo que para comodidad se hace un cambio de variable: en vez de x se pone y en vez de y se pone x en la regla de correspondencia de f^* obteniendo

$$y = f(x) = \{(x, y) \,/\, y = f(x),\ x \in A,\ y \in B\}$$

$$x = f^*(y) = \{(y, x) \,/\, x = f^*(y),\ y \in B,\ x \in A\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \downarrow \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$y = f^*(x) = \{(x, y) \,/\, y = f^*(x),\ x \in B,\ y \in A\}$$

EJEMPLO 5

$$y = f(x) = 3x + 1 \Rightarrow x = f^*(y) = \frac{y-1}{3}$$

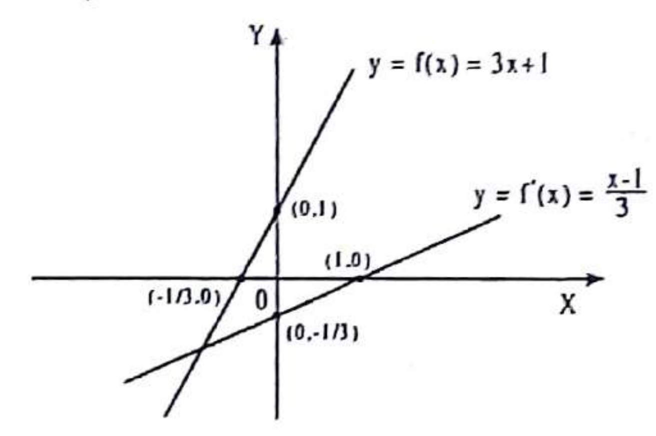
$$\Rightarrow y = f^*(x) = \frac{x-1}{3}$$

Obteniendo:

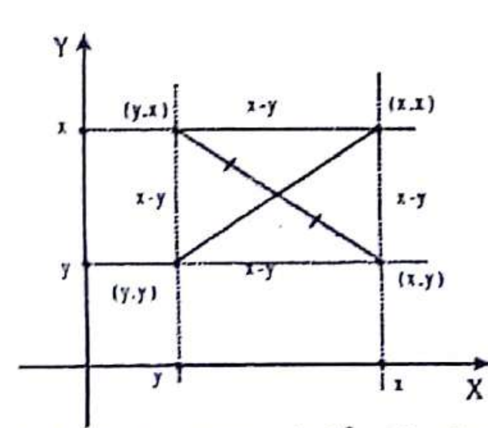
$$f : R \to R \; / \; y = f(x) = 3x + 1$$

$$f^* : R \to R \; / \; y = f^*(x) = \frac{x-1}{3}$$

cuyas gráficas en un mismo plano coordenadas son:



Propiedad simétrica de las gráficas de f y f*



Recordando que $(x, y) \in f \;\wedge\; (y, x) \in f^*$ tenemos (x, x), (y, y) pertenecen a $y = x$ al formarse un cuadrado de lados $(x - y)$ las diagonales se bisecan en su punto medio; luego los puntos $(y, x) \in f^*$ e $(x, y) \in f$ están a igual distancia con respecto a la recta $y = x$.

Propiedad: La gráfica de f^* es la simétrica de la gráfica de f respecto de la recta $y = x$.

Nota importante: Si se define la función $f : A \to Rf$ como inyectiva, siempre poseerá inversa pues toda función es sobreyectiva sobre su rango como se definió anteriormente.

EJEMPLO 6

Sea $f(x) = \sqrt{x^2 + |2x + 2| + 3}$ **,** $x \in \langle -\infty, -1]$**. Hallar** $f^*(x)$ **indicando su dominio.**

Solución:

Como $\quad x \leq -1 \Rightarrow |2x+2| = -2x-2$ ¿por qué?

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x-2+3} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = 1-x \text{ ¿por qué?}$$

Como $\quad y = 1-x \Rightarrow x = 1-y \Rightarrow y = 1-x = f^*(x)$

$$x = f^*(y)$$

$Df^* = Rf$ como $x \leq -1 \Rightarrow -x \geq 1 \Rightarrow -x+1 \geq 2.$

$$\Rightarrow Rf = [2, \infty>$$

$$f^*(x) = 1-x, \qquad x \in [2, \infty>$$

EJEMPLO 7

Si $f(x) = -2|x-1|-2$, $x \in [2, 3]$ determinar $f^*(5)$

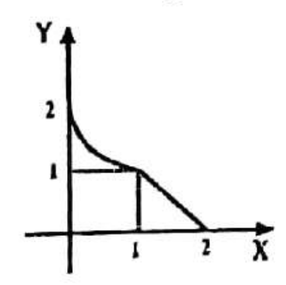
Solución:

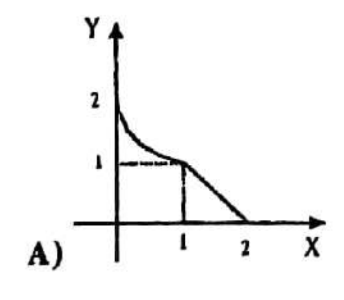
Recordando que si $(x, y) \in f \Rightarrow (y, x) \in f^*$

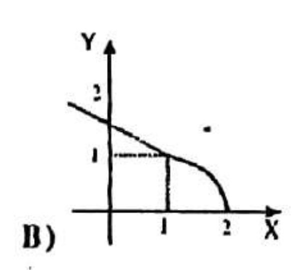
$$-2|x-1|-2 = 5 \Rightarrow |x-1| = \frac{3}{2}\left[\begin{array}{l} x = 5/2 \text{ si} \\ x = -1/2 \text{ no ¿porqué ?} \end{array}\right.$$

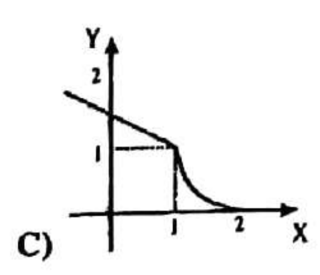
Luego $(5/2, 5) \in f \Rightarrow (5, 5/2) \in f^* \Rightarrow f^*(5) = 5/2.$

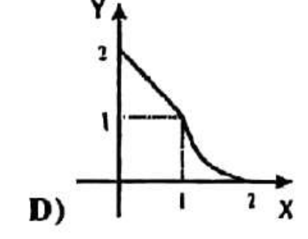
Indicar la gráfica de la función inversa de

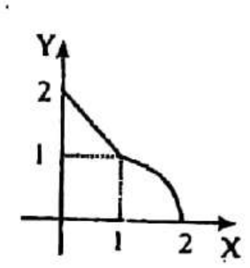


A)


B)


C)


D)




Solución:

Por simetría respecto a la recta $y = x$ es la D.

EJEMPLO 8

Sean las funciones:

$$f = \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}, \quad g(x) = \sqrt{x+3}, \quad x \in \langle -3, 3\rangle$$

determinar $(g^2 + f)^*(4)$

Solución:

como $\qquad f + g^2 = \{(0, 3), (1, 4), (2, 6)\}$

entonces $\qquad (f + g^2)^* = \{(3, 0), (4, 1), (6, 2)\}$ observamos que $(g^2 + f)^*(4) = 1$.

4.8 ACOTACION DE UNA FUNCION

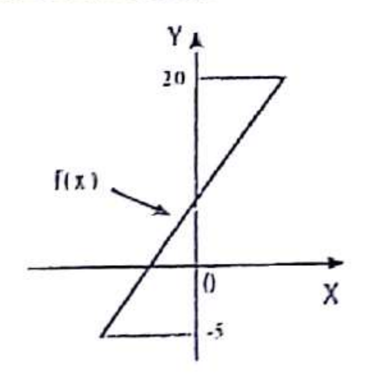
DEFINICION 8

Se dice que la función f está acotada si existe un número real no negativo M que verifica: $|f(x)| \le M \ \forall x \in \text{Dom} f$, es decir verifica

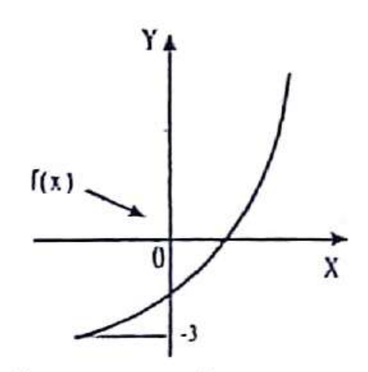
$$-M \le f(x) \le M$$

en particular si solo se verifica $-M \le f(x)$ se dice que f(x) se dice f(x) está acotada de inferiormente y (-M) es su cota inferior, cualquier otro número real menor a (-M) también se considera cota inferior.

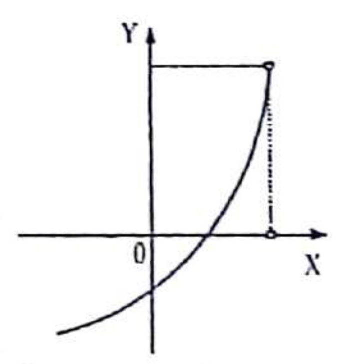
EJEMPLO 1



$|f(x)| \le 20$
f es acotada



f no es acotada como $-3 \le f(x)$. Si es acotada inferiormente



f no es acotada como $f(x) \le 4$. sí es acotada superiormente

EJEMPLO 2

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 5}$ hallar el menor valor positivo k tal que $|f(x)| \le k$, $\forall x \in \text{Dom} f$ donde Dom f es el mayor conjunto posible.

Solución:

Como $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 5} = \dfrac{1}{2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{31}{8}}$

puesto que $\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{31}{8} \geq \dfrac{31}{8}$, $\forall x \in R$

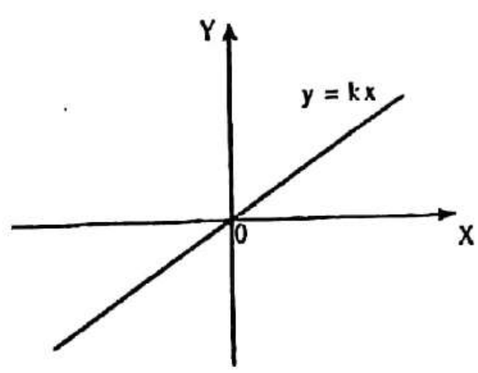
invirtiendo $\dfrac{1}{2(x - 3/4)^2 + 31/8} \leq \dfrac{8}{31} = k \rightarrow \forall x \in R$

entonces $\left|\dfrac{1}{2(x - 3/4)^2 + 31/8}\right| \leq \dfrac{8}{37}$

4.9 VARIACION DIRECTA E INVERSA

DEFINICION 9

Si se tiene una función lineal del tipo $f(x) = kx = y$ donde k es una constante positiva, decimos que hay una variación directo o que y varía directamente con x. El número k es la constante de variación.



EJEMPLO 1

El volumen del agua que se produce cuando se derrite la nieve varía directamente con respecto al volumen de la nieve. Las técnicas han descubierto que 150 cm^3 de nieve se derriten en 16.8cm^3 de agua. Si suponemos que se funde 200cm^2 de nieve ¿cuánto de agua se espera?.

Solución:

Sea A el volumen de agua, N el volumen de nieve $A = kN$

De los datos $16{,}8\ cm^3 = k\ 150\ cm^3$

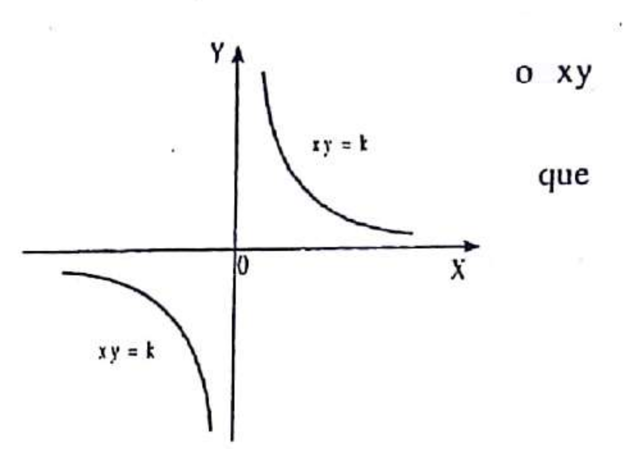
entonces $k = 0{,}112$

Así la ecuación de la variación es $A = 0{,}112N$ si se derrite 200cm^3 de nieve se espera

$$A = (0{,}112)(200cm^3) = 22{,}4\ cm^3 \text{ de agua.}$$

DEFINICION 10

Si se tiene una función del tipo $f(x) = \frac{k}{x} = y$ o $xy = k$, donde k es una constante positiva, decimos que hay una variación inversa o que y varía inversamente con respecto a x. El número k es la constante de variación



EJEMPLO 2

Se sabe que si la temperatura se mantiene constante, entonces la presión de un gas encerrado en un recipiente es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 12 pulg. de radio es de 24 libras por pulgada cuadrada ($lb/pulg^2$). Si el radio del globo aumenta a 145 pulg. determinar la nueva presión del gas.

Solución:

Si denotamos la presión y el volumen por P y V respectivamente entonces $p = \frac{k}{v}$, k constante como $p = 24 lb/pulg^2$ y $V = \frac{4}{3}\pi(12)^3 = 2304\pi pulg^3$ se tiene

$$24\frac{lb}{pulg^2} = \frac{k}{2304\pi pulg^3}$$

entonces $k = 55296$ lb pulg.

En consecuencia la fórmula para p es:

$$p = \frac{5529}{v} pulg.$$

si el radio es 15 pulg. entonces $v = \frac{4}{3}(15)^3\pi = 4500\pi pulg^3$ en la fórmula

$$p = \frac{55296\pi lb\ pulg}{4500\pi pulg3} = 12{,}288 lb/pulg^2$$

4.10 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Calcular el rango de la función:

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2}}$$

Solución:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} = \frac{(x - 1) - 1}{(x - 1)^2 + 1} \geq 0 \leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 1$$

$$(x - 1) \cup (x - 1 \leq -1)$$

$$x \geq 2 \text{ ó } x \leq 0$$

$$Df : \langle -\infty, 0] \cup [2, \infty\rangle$$

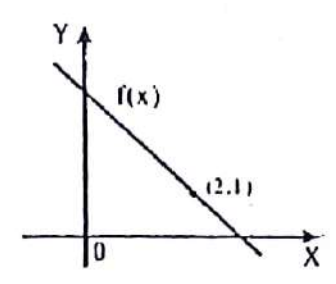
sea $z = x - 1 \Rightarrow y^2 = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \leftrightarrow z^2 = -\left(\dfrac{y^2 + 1}{y^2 - 1}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} \leq 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow y^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$$

como es $y \geq 0$ entonces $Rf = [0, 1\rangle$.

PROBLEMA 2

Si f(x) tiene gráfica



además se sabe igual $f(f(x)) = x$. Hallar $f(4)$.

Solución:

$f(2) = 1 \Rightarrow 1 = 2a + b \Rightarrow b = 1 - 2a \Rightarrow f(x) = ax + 1 - 2a$

$f(f(x)) = x \Rightarrow a(ax + 1 - 2a) + 1 - 2a = x$

$a^2x - (2a^2 + a - 1) = 1x + 0$

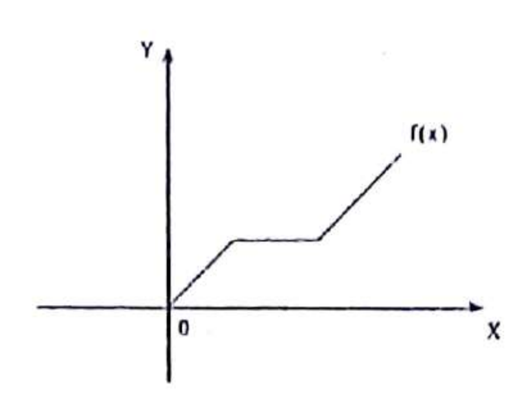
$a^2 = 1 \wedge (2a - 1)(a + 1) = 0 \leftrightarrow \quad a = -1$

$b = 1 - 2(-1) = 3$

$f(x) = -x + 3$ piden $f(4) = -4 + 3 = -1$.

PROBLEMA 3

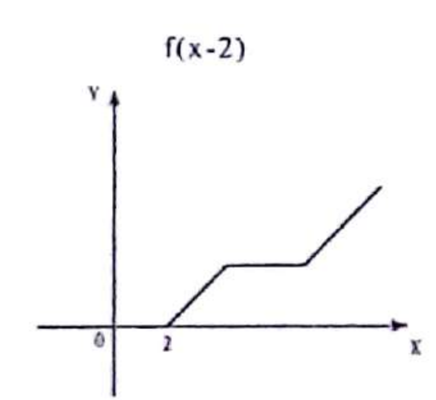
Dada la gráfica de $f(x)$.

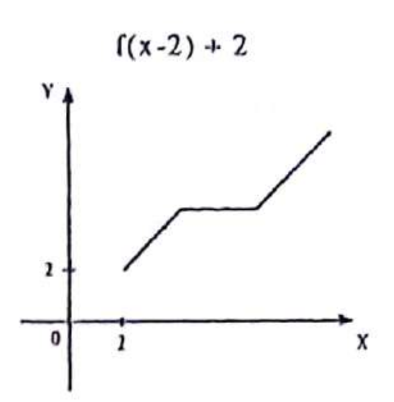


Graficar $|f(x-2)+2|$.

Solución:

$f(x\text{-}2)$ $\qquad\qquad$ $f(x\text{-}2)+2$





Como $f(x-2)+2>0$ la gráfica de $|f(x-2)+2|$ es la misma de ella.

PROBLEMA 4

Dada la función $f(x)=\sqrt{|x|+2-x^2}\,.\operatorname{sgn}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}\right)$.

Calcular Domf si $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$

Solución:

$(|x|+2-x^2\geq 0)\wedge(x+2\geq 0)\wedge(x\neq 1)$

$(|x|^2-|x|-2\leq 0)\wedge(x\geq -2)\wedge(x\neq 1)$

$(|x|-2)(\underbrace{|x|+1}_{+}\leq 0)\wedge(x\geq -2)\wedge(x\neq 1)$

$(|x|\leq 2)\wedge(x\geq 2)\wedge(x\neq 1)$

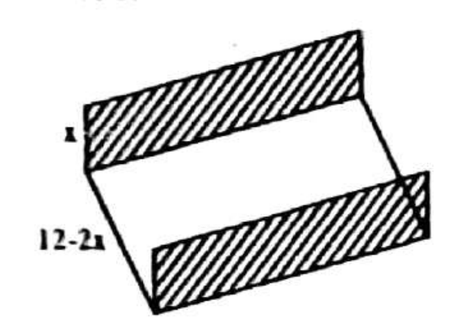
$(-2\leq x\leq 2)\wedge(x\geq 2)\wedge x\neq 1$

Dom f. $x\in[-2,2]-\{1\}$

PROBLEMA 5

A partir de una hoja rectangular de metal 12 pulg. de ancho, se desea construir un canalón para desaguar la lluvia. Para ello se doblan hacia arriba dos lados de manera que quedan perpendiculares a la hoja ¿Cuántas pulgadas se deben doblar para que el canalón tenga capacidad máxima?

Solución:



$f(x) = x(12 - 2x),\ 0 < x < 6$

$f(x) = -2x^2 + 12x = -2(x-3)^2 + 18$

f(x) es máximo si x = 3 cuando f(x) = 18, entonces se doblan 3 pulgadas.

PROBLEMA 6

Calcular la función inversa de $f(x) = \sqrt{\dfrac{3|x| + 4|-x-1| - 2}{7x^{5/4} + 2x^{1/4}}}$

Solución:

$\sqrt[4]{x}$ existe $\leftrightarrow x > 0$

$$f(x) = \sqrt{\frac{3|x| + 4|-x-1| - 2}{7x^{5/4} + 2x^{1/4}}} = \sqrt{\frac{7x+2}{x^{1/4}(7x+2)}} = \sqrt{\frac{1}{x^{1/4}}}$$

luego: $\quad y = f^{*}(x) = \dfrac{1}{x^8}$

PROBLEMA 7

Sean f(x) y g(x) dos funciones biyectivas tales que $f(x) = \sqrt{2x-1}$ si $f: [1, 5] \rightarrow [c, d]$

$$g(x) = 2x^2 - 12x + 19 \quad \text{si} \quad g: \langle -\infty, a] \rightarrow [9, \infty\rangle$$

hallar $(a + c)^d + (c + d)^{a+c}$

Solución:

Para f(x): $\quad 1 \le x \le 5 \rightarrow 2 \le 2x \le 10$

$$\rightarrow 1 \le 2x - 1 \le 9$$

$$1 \le \sqrt{2x-1} \le 3 \Rightarrow \begin{matrix} c = 1 \\ d = 3 \end{matrix}$$

Para g(x)

$$g(x) = 2(x-3)^2 + 1 \text{ con } g(a) = 0$$

$$9 = 2(a-3)^2 + 1 \Rightarrow 8 = 2(a-3)^2$$

$$\Rightarrow 4 = (a-3)^2 \leftrightarrow \quad a-3 = 2 \cup a-3 = -2$$

$$a = 5 \text{ ó } a = 1$$

como $g(5) \neq 9$ se acepta $a = 1$

Rpta.:

$$(1+1)^3 + (1+3)^{1+1} = 8 + 16 = 24$$

PROBLEMA 8

Sea $f : R \to R \Big/ f(x) = 13\left(\dfrac{x}{16x^2+9}\right) + 12\left(\dfrac{1}{16x+9x^{-1}}\right)$, hallar un valor de $m > 0$ para $f(x)$ tal que $|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in \text{Dom } f$.

Solución:

$$\text{Dom} f = R \text{ con } f(x) = y = \frac{25x}{16x^2+9}$$

$\Rightarrow 16x^2y + 9y - 25x = 0$ cuadrática en x

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4(16y)(9y)}}{32y} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4(16y)(9y)}}{32y}$$

$$\Rightarrow 625 - 64(g)y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \frac{625}{9x64}$$

$$\Leftrightarrow |y| \leq \frac{25}{48} \qquad \text{entonces} \qquad M = \frac{25}{48}$$

PROBLEMA 9

Hallar f o g si $\quad f = \sqrt{4+x}, \quad x \in [0,6]$

$$g = x^2 + 2, \quad x \in [-1, 3]$$

Solución:

Dom f o g $= -1 \leq x \leq 3 \cap 0 \leq x^2 + 2 \leq 6$

$$-1 \leq x \leq 3 \wedge -2 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D\, f\, o\, g : -1 \leq x \leq 2$$

$$f\, o\, g = f(g(x)) = f(x^2+2) = \sqrt{4 + x^2 + 2}$$

$$f\, o\, g = \sqrt{x^2+6}, \quad D\, f\, o\, g : -1 \leq x \leq 2$$

PROBLEMA 10

Determinar si las siguientes funciones son pares o impares.

i) $f(x) = \left(x|x| - \frac{1}{x}\right)\text{sen}(x^4)$

ii) $g(x) = x^4$

iii) $h(x) = \frac{1}{x}\left(|2x| - |x+2|\right)$

Solución:

i) f(x) es impar pues: $f(-x) = \left(\left(-x|x| + \frac{1}{x}\right)\right) = -f(x) \quad \forall x \in Df$

ii) g(x) es para pues: $g(-x) = (-x)^4 = g(x) \quad \forall\, x \in R$

iii) h(x) no es par ni impar pues: $h(-x) = -\frac{1}{x}\left(|2x| - |-x+2|\right) \neq -h(x) \neq h(x)$

PROBLEMA 11

Si $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x > 0$, $g(x) = 16x^2$ $\;g \circ f \circ h = 128\sqrt{4x^2 - 1}$, además $h(1) + h(2) = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $b > a$ calcular $5a + b$

Solución:

$$g \circ f \circ h = g(f(h)) = g\left(2\sqrt{h}\right) = 16\left(2\sqrt{n}\right)^2 = 64h \qquad (1)$$

además $$g \circ f \circ h = 128\sqrt{4x^2 - 1} \qquad (2)$$

de (1) = (2) entonces $64h = 128\sqrt{4x^2 - 1}$, entonces $h = 2\sqrt{4x^2 - 1}$, luego

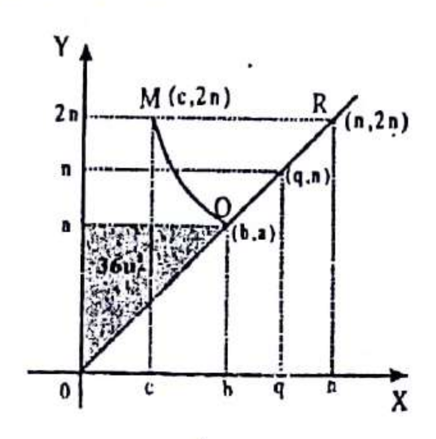
$$h(1) + h(2) = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{15} = \sqrt{12} + \sqrt{60} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

como $a < b \;\Rightarrow\; a = 12. \quad b = 60$

$$5a + b = 5(12) + 60 = 120$$

PROBLEMA 12

El gráfico muestra la relación entre dos magnitudes A y B. En el tramo $\overline{MO}$ son inversamente proporcionales, pero en el tramo $\overline{OR}$ son directamente proporcionales. Calcular a + b + c.



Solución:

Tramo lineal D. P.

$$\frac{a}{b}=\frac{n}{9}=\frac{2n}{n}=k \Rightarrow \begin{matrix} a=26 \\ n=18 \end{matrix}$$

Tramo parabólico I.P.

$ab = c(2n)$ como $a = 2b \Rightarrow 2b^2 = 36c$

$n = 18 \qquad b^2 = 18c$

Area Triangulo $\Rightarrow \dfrac{ab}{2} = 36 \Rightarrow ab = 72$ como $a = 2b$ entonces $2b^2 = 72$, luego $b = 6$

$a = 2b = 12, \quad 36 = 18c$

$c = 2$

piden $a + b + c = 12 + 6 + 2 = 20$.

PROBLEMA 13

Sea f una función inyectiva tal que $f^*\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right) = a$. Hallar el conjunto solución de la inecuación $f(a) \le \dfrac{x-3}{2x-1}$.

Solución:

Si $\quad f^*\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right) = a \Rightarrow \left(\dfrac{x-4}{x+4}, a\right) \in f^*$

$$\Rightarrow \left(a, \frac{x-4}{x+4}\right) \in f$$

$$\Rightarrow f(a) = \frac{x-4}{x+4}$$

luego

$$\frac{x-4}{x+4} \le \frac{x-3}{2x-1} \Rightarrow \frac{x-4}{x+4} - \frac{x-3}{2x-1} \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-10x+16}{2x^2+7x-4} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-8)(x-2)}{(2x-1)(x+4)} \le 0$$

PROBLEMA 14

Dadas las funciones:

$$f(x) = 2\sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty>$$

$$g = \{(-3, 6), (-2, 1), (0, 2), (1,5), (2, 3), (4, -2)\}$$

hallar (f + g) (4) / (f . g)(1)

Solución:

$$Df + g = Df . g = Df \cap Dg = \{0, 1, 2, 4\}$$

$$(f + g)(4) = f(4) + g(4) = 2\sqrt{4} + (-2) = 2$$

$$(f . g)(1) = f(1) . g(1) = 2\sqrt{1} . (5) = 10$$

piden

$$2 / 10 = \frac{1}{5}$$

PROBLEMA 15

Determinar el rango de $f(x) = \frac{x}{|x|}\left[(x-1)^2 + 2|x|\right]$

Solución:

Si $x > 0$ entonces $f(x) = (x-1)^2 + 2x$

$$= x^2 + 1$$

Si $x < 0$ entonces $f(x) = (x^2 - 4x + 1)$

$$= ((x-2)^2 - 3)$$

entonces $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 3 - (x-2)^2, & x < 0 \end{cases}$

De aquí obtenemos que:

$$Ranf = R - [-1, 1]$$

4.11 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Hallar el dominio de la función f definida por

$$f(x)=\frac{\left(\left|(x-3)^2+1\right|-2\right)}{x^2-36}+\frac{\sqrt[6]{x^3+x^2-2}}{\sqrt[5]{x^4+x^3-2}}.$$

A) $x \in \langle 1, 6\rangle$ B) $x \in \langle 1, 6\rangle \cup \langle 6, \infty\rangle$ C) $x \in [1, \infty\rangle$

D) $x \in \langle 1, \infty\rangle$ E) $x \in [0, \infty\rangle$

PROBLEMA 2

Determinar el rango de l a función f definida por:

$$f(x)=\begin{cases}2x-f(x), & x \geq 1\\ xf(x)-x+1, & x<1\end{cases}$$

A) $\langle -\infty, \infty\rangle$ B) $[-1, \infty\rangle$ C) $[-2, \infty\rangle$ D) $[1, \infty\rangle$ E) $[0, \infty\rangle$

PROBLEMA 3

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>1\\ x-7, & -1 \leq x \leq 1\\ -1, & x<-1\end{cases}$$

Si m es el mayor número real tal que $m \leq f(x)\ \forall\ x \in R$ y M es el menor número real tal que $f(x) \leq M,\ \forall\ x \in R$, hallar M – n.

A) 4 B) 9 C) 6 D) 8 E) 10

PROBLEMA 4

Sea $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $g=\{(2, 4), (5, 3), (-6, 8), (0,2), (-1/2, 5)\}$, hallar $(f \circ g^*)(4)$ g^* inverso de g.

A) $\sqrt{24}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{35}$ D) $\sqrt{5}$ E) $-\sqrt{35}$

PROBLEMA 5

Dada la función $f(x) = |x^2 - 4| - 3$; $x \in [-2, 0] \cup [3, 5]$ y el conjunto $F = \{(|u^2 - 4| - 3, u^2) / u \in [-2,0] \cup [3,5]\}$.

Decir el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I) La gráfica de f intersecta al eje en 2 puntos.

II) F no es inyectiva

III) F es una función

A) FFF B) FFV C) FVF D) VFF E) FVV

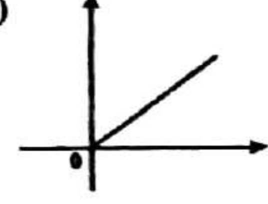
PROBLEMA 6

Sea $f(x) = |x|$

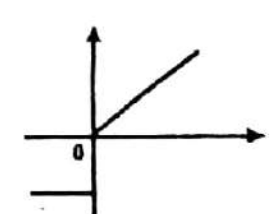
$g(x) = x + 2$

entonces la gráfica de $(f + g)(x)$ es

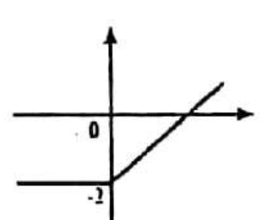
A)



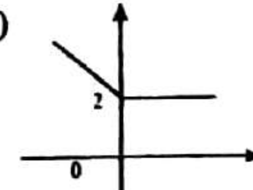
B)



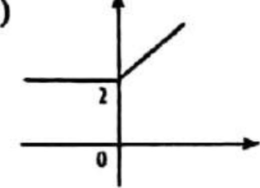
C)



D)



E)



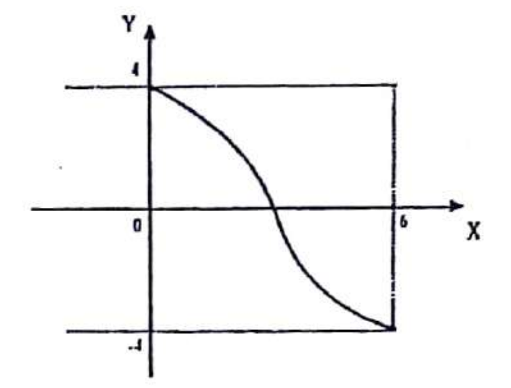
PROBLEMA 7

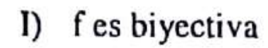
Dadas las funciones $f(x) = 3 + \frac{x^2}{4}$, $g(x) = \frac{2}{x+1}$ y la función $h(x) = f(g(x))$ entonces $h(x - 1)$ es igual a

A) $\frac{(x-1)^2}{4}$ B) $3 + \frac{1}{x^2}$ C) $3 + \frac{1}{2(x+1)^2}$ D) $\frac{8}{x^2}$ E) $3 + \frac{1}{(x-1)^2}$

PROBLEMA 8

Sea la función f tal que $f : [0, 6] \to [-4, 4]$ y cuya gráfica se muestra. Decir el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:





I) f es biyectiva

II) $|f|$ es biyectiva

III) Si $G(x) = f(x) + 4 \ \forall \ x \in [0, 6]$

entonces G es inyectiva

A) VVF B) VFV C) FFV D) FVF E) VVV

PROBLEMA 9

Dado $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + bx + 1$ y $f(x) \geq \dfrac{c^2}{2} + bc + 1$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall \ x \in \mathbb{R}$, hallar c.

A) b B) 0 C) -b D) 1 E) b-1

PROBLEMA 10

Decir si es verdadera (V) o falsa (F) cada una de las siguientes proposiciones $f(x) = 3x$.

I) Si $|x - 1| < 0,1$ entonces $|f(x) - 3| < 0,3$

II) Si $|f(x)| = 3$ entonces $x \in \{-1, 1\}$

III) Si $|f(x) - 3| < 0,6$ entonces $|x - 1| < 0,1$

A) VVV B) VFF C) VFV D) VVF E) FVV

PROBLEMA 11

Sea la siguiente función:

$$f = \{(1, 8), (2, 6), (3, -1), (4, 7), (5, -1)\} \text{ y } A = \{x \,/\, f(x + 1) \geq 1\}$$

halle la suma de elementos de A.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA 12

Para la función $f(x) = x^2 - 2x + 3 + |x - 10| + |x|$; $2 \le x \le 10$ A es el menor valor real y B es el mayor valor real, tal que $B \le f(x) \le A$ $\forall$ $x \in [2, 10]$. Hallar A + B

A) 80 B) 96 C) 103 D) 106 E) 115

PROBLEMA 13

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 6 - x, & x \in [-2, 0> \\ 2 + x, & x \in [0, 4> \end{cases}$

Decir si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

I) f es univalente (inyectiva)

II) f es decreciente en <-2, -1>

III) Si f(x) = 7 entonces x ∈ [-2, 0>

A) VFF B) FVV C) VFV D) VVV E) FFV

PROBLEMA 14

Sean $f : [2, 4] \rightarrow A$, $f(x) = 7 - 2x$ biyectiva y $g : A \rightarrow B$, $g(x) = \dfrac{7}{x+1}$ igualmente biyectiva. Determinar B.

A) $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$ B) $\left[-\dfrac{9}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$ C) $\left[-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{7}{6}\right]$ D) $\left[-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{6}\right]$ E) $\left[-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right]$

PROBLEMA 15

Decir el valor de verdad de las siguientes proposiciones referidas a las funciones f, g, h_1 y h_2

I) $f : R - \{0\} \rightarrow R$, $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ no es acotado.

II) $g : <10^{-5}, 10> \rightarrow R$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$ es acotada

III) Si h_1 y h_2 son acotadas en un mismo dominio entonces $h_1 + h_2$ es acotada.

A) FFV B) FFF C) FVV D) VVF E) VFV

4.12 TEST DE AUTOEVALUACION

PROBLEMA 1

Determinar la validez de las siguientes proposiciones:

I) $f = \{(y, |x| / y = |x|, x \in R)\}$ es una función con dominio R.

II) $h = \{(x^2, x)/x \in R\}$ no es una función

III) $g = \{(x + y, x - y) / x, y \in R\}$ es una función

A) VVV B) VFF C) FFV D) FFF E) FVF

PROBLEMA 2

Determinar el rango de $f(x) = \dfrac{x}{|x|}\left[(x-1)^2 + 2|x|\right]$

A) $<0, \infty>$ B) $<-\infty, 0>$ C) R D) $R - [-1, 1]$ E) $R - [-2, 2]$

PROBLEMA 3

Decir si es verdadera (V) o falsa (F) las siguientes proposiciones:

I) Si f es creciente (-f) es creciente.

II) Si la función $f : R \to R$ es par entonces $f(1)\, f(-1) \geq 0$

III) Si $f : R \to R$ es decreciente, entonces f es inyectiva

Sugerencia: f creciente si $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$,

f decreciente si $x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$

A) FFV B) FVV C) VFV D) VVV E) VVF

PROBLEMA 4

Sean f y g dos funciones biyectivas tales que $(f \circ g)\dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{4}$,

$f\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{4}{3}$, $f^{*}\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$, hallar $(f \circ g^{*})\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Aquí f^{*} es la función inversa de f, $(f \circ g)$ es la composición de f con g.

A) $\dfrac{4}{3}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{2}{5}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) 2

PROBLEMA 5

Sea $f = \{(x, y) / y^2 - 1,\ x \leq 0\}$

I) $Ranf = [1, \infty\rangle$

II) $f^*(2a) = -\sqrt{2a+1}$, f^* inversa de f

III) $Dom\left(\frac{f}{f^*}\right) = \langle -1, 0]$

A) FVV B) FFV C) FVF D) VFF E) VVV

PROBLEMA 6

Se dan la función f y g ambas con dominio R y tales que

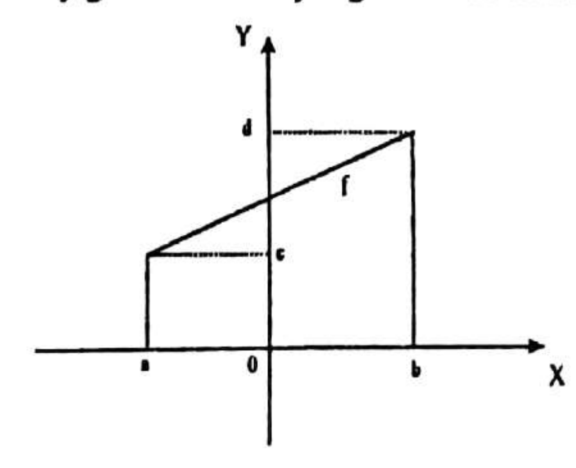
$$f(2x-1) = 4x^2 - 4x,\quad g(x-2) = f(2x)$$

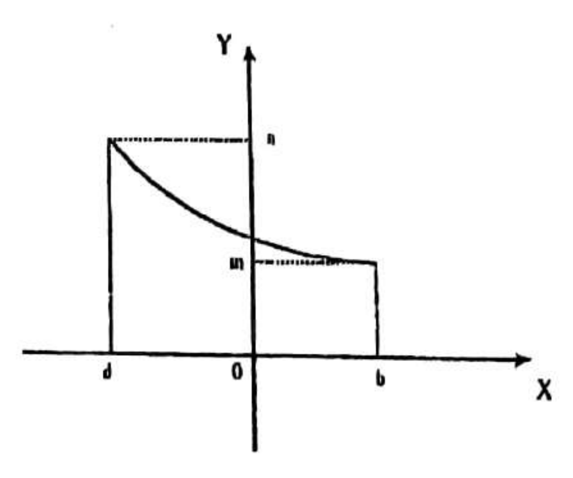
Calcular $$E = 5\sqrt{\frac{(f \circ g)(0)}{14}}$$

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

PROBLEMA 7

Sean f y g funciones cuyas gráficas se muestran





de ello se afirma

I) $f - g$ es una función creciente

II) $h(x) = f(|x|) + g(|x|)$ es una función par en $[-b, b]$

III) Existe una constante real $k > 0$ tal que $|f(x) + g(x)| \leq k\ \forall x \in [a, b]$. Diga el valor de verdad de estas proposiciones

A) FVF B) VVF C) FVV D) VVV E) VFV

PROBLEMA 8

Sean f y g dos funciones biyectivas, tales que: (f o g)(2/5) = 3/4, f(2/5) = 4/3, f^* es la función inversa de f.

A) 4/3 B) 3/4 C) 2/5 D) 1/2 E) 2

PROBLEMA 9

Sean la funciones:

$$f = \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

$$g(x) = \sqrt{x+3}, \qquad x \in \langle -3, 3\rangle$$

determinar $(g^2 + f)^*(4)$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 4 E) 10

PROBLEMA 10

Si f es una función estrictamente creciente, determinar el siguiente conjunto:

$$\{x \in R \,/\, f(|x+2|) > f(|x-3|)\}$$

A) <1, +∞> B) [-1, ∞> C) <1/2, +∞] D) <-1/2, +∞> E) <-1/2, 1/2>

4.13 CLAVE DE RESPUESTAS

Problemas propuestos:

1) B	6) D	11) C
2) D	7) B	12)D
3) B	8) B	13) D
4) B	9) C	14) C
5) B	10) D	15) C

Test de autoevaluación

1) E	6) E
2) D	7) D
3) D	8) A
4) A	9) A
5) A	10) C



5.0 OBJETIVOS

El objetivo de este capítulo es presentar la teoría básica de las funciones exponenciales y logarítmicas de tal manera que el alumno pueda utilizar estas funciones para plantear y resolver problemas que abarquen incluso situaciones que se presentan en la vida real.

Motivación:

Las funciones exponencial así como la función logarítmica son dos de las funciones más importantes, razón por la cual se les hace un estudio especial. Estas funciones aparecen con frecuencia en una amplia variedad de aplicaciones como por ejemplo:

"Respuesta a la publicidad en televisión"

El porcentaje R de audiencia que responde a un comercial de televisión para un nuevo producto después de "t" días se determina mediante la fórmula:

$$R = 70 - 100e^{-0.2t}$$

a) ¿Qué porcentaje se espera que responda después de 10 días?

b) ¿Cuál es el máximo porcentaje de personas que se espera respondan?

c) ¿Cuántos días deben transcurrir para que R exceda el 40 por ciento?

Este tipo de problemas es uno de los muchos que pueden ser modelados utilizando las funciones exponenciales.

5.1 FUNCION EXPONENCIAL

Antes de tocar este tema es conveniente recordar la teoría de exponentes, restringiendo la base a números reales positivos y los exponentes a números racionales.

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}, \ \forall b \neq 0$
5. $a^0 = 1, \ \forall a \neq 0$
6. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, \ \forall a \neq 0$
7. $(a^x)^y = a^{xy}$
8. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
9. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \ b \neq 0$
10. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
11. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
12. $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{a^n b}$

Observación:

Hemos restringido x a los números racionales pero, ¿cuál es el significado de a^x, $\forall a \in \mathbb{R}^+$, siendo x un número irracional?. Veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1

¿Cuál es el valor de $2^{\sqrt{2}}$?

Si consideramos $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, entonces $2^{\sqrt{2}} = 2^{1{,}4142}$, lo cual no daría un valor aproximado de la potencia dada. Es más, si deseamos mayor grado de precisión bastará con hallar la $\sqrt{2}$ con una cantidad mayor de cifras decimales.

DEFINICIÓN 1

La función exponencial de base a, se define de l a siguiente manera:

$$f(x) = a^x, \ \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}; \qquad Df = \mathbb{R}$$

Observación:

¿Porqué se excluye a, a = 1?

También debemos excluir las bases negativas, ya que de lo contrario tendríamos que excluir muchos valores de x del dominio, como x = 1/2, x = 3/8, etc. Recuerde que $(-2)^{1/2}$; $(-1)^{3/8}$, etc., no están definidas en el sistema de los número reales.

Gráficas de funciones exponenciales

Empecemos haciendo la gráfica de la función exponencial $f(x) = 2^x$.

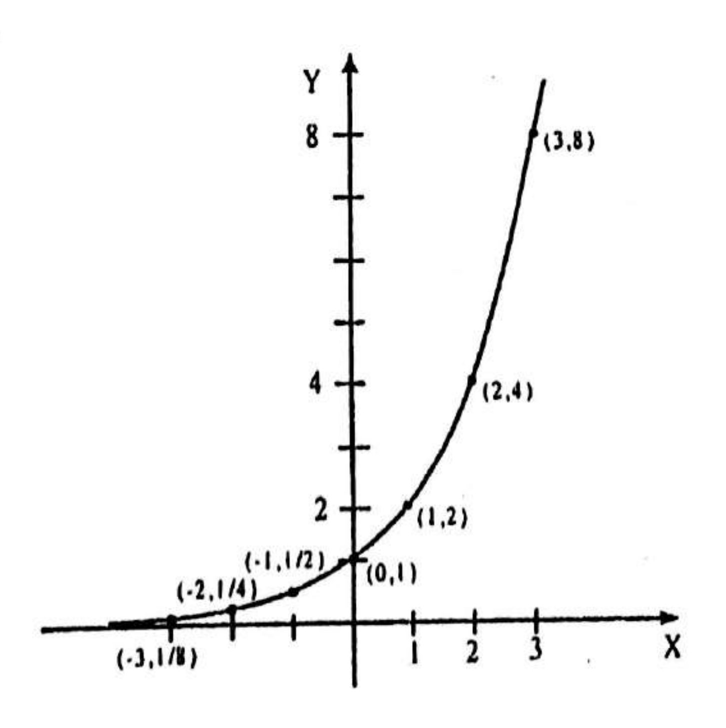
Para esto el dominio resulta ser el conjunto de los números reales. Primero localizamos algunos puntos sobre la gráfica de $f(x) = 2^x$, según se muestra en la tabla.

x	$f(x) = 2^x$
-10	$\approx$ 0,00098
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8
10	1024

Como $2^x > 0$, $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$, el rango de f es $\langle 0, \infty \rangle$, esto nos hace concluir que la gráfica no tiene intersecciones con el eje x y que de hecho, estará encima del eje x.

La tabla muestra que la intersección con el eje y es 1. La tabla también indica que cuando x decrece indefinidamente, es decir x tiende a menos infinito ($x \to -\infty$), el valor de $f(x) = 2^x$ se acerca cada vez más a cero. Así el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica cuando $x \to -\infty$.

También se observa que cuando x crece ilimitadamente ($x \to \infty$), el valor de $f(x) = 2^x$ aumenta rápidamente, lo cual hace que la gráfica de $f(x) = 2^x$ se eleve también rápidamente. Así vemos que f es una función creciente y por lo tanto inyectiva. Con toda información, localizamos algunos puntos de la tabla y los conectamos mediante una curva suave, continua, según se muestra a continuación.

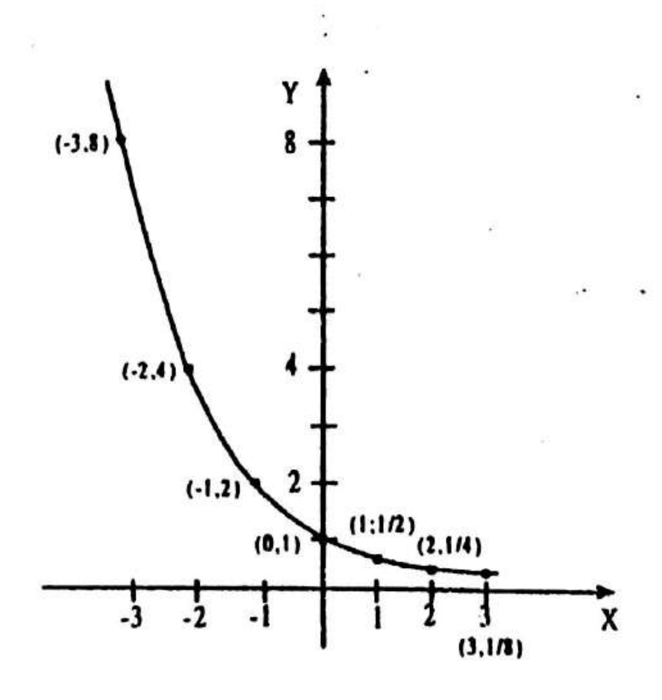


Ahora hagamos la gráfica de $f(x) = (1/2)^x$. Se tiene que el dominio de $f(x) = 2^x$ es R. Como en el caso anterior, localizamos algunos puntos sobre la gráfica.

x	$f(x) = (1/2)^x$
-10	1024
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125
10	$\approx$ 0,00098

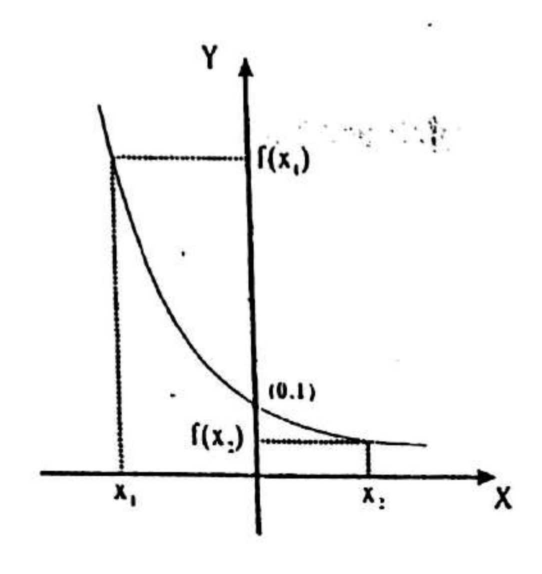
Como en el caso anterior, siendo $(1/2)^x > 0 \ \forall x \in R$, el rango de f es $<0, \infty>$. Así la gráfica está sobre el eje x y no tiene intersecciones con él.

La intersección con el eje y es 1. Cuando $x \to -\infty$, $f(x) = (1/2)^x$ crece muy rápido. Cuando $x \to \infty$, el valor de f(x) tiende a cero. De modo que el eje x (y = 0) es una asíntota horizontal cuando $x \to \infty$. Se ve entonces que f es una función decreciente y por lo tanto inyectiva. Con toda esta información, localizamos algunos puntos de la tabla y los conectamos mediante una curva suave, continua, según se muestra a continuación.



Luego de estos ejemplos ya podemos hacer un análisis detallado de la función $f(x) = a^x$.

a) Cuando la base a ∈ <0, 1>



Características:

$Df = \mathbb{R}$

$Rf = \langle 0, \infty \rangle$

Interceptos con los ejes: (0,1)

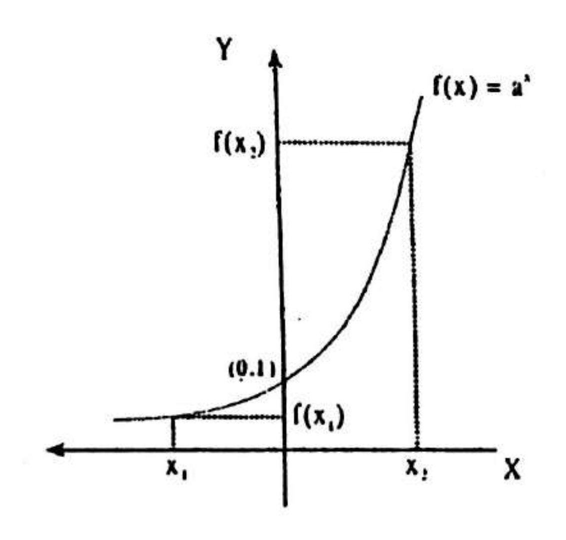
Asíntota horizontal: $y = 0$

Monotonía: Es estrictamente decreciente. Es inyectiva

Si $x_1 < x_2$, $\forall x_1, x_2 \in Df$ entonces $a^{x_1} > a^{x_2}$

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

b) Cuando la base a ∈ <1, ∞>



Características:

$Df = \mathbb{R}$

$Rf = \langle 0, \infty \rangle$

Interceptos con los ejes: (0,1)

Asíntota horizontal: $y = 0$

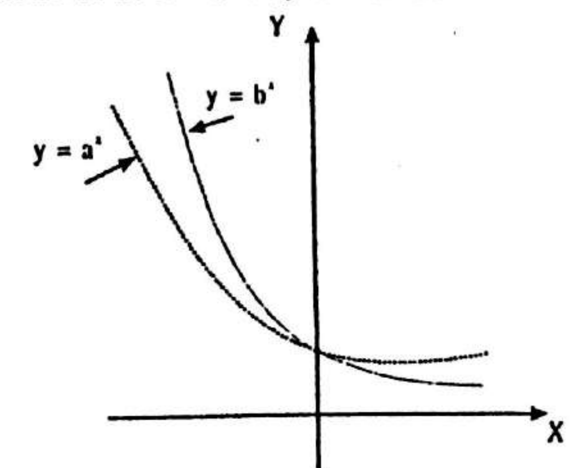
Monotonía: Es estrictamente creciente. Es inyectiva

Si $x_1 < x_2$, $\forall x_1, x_2 \in Df$ entonces $a^{x_1} < a^{x_2}$

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

Propiedades derivadas de la comparación de las gráficas de dos funciones exponenciales:

Caso I: Si $0 < a < 1$, $0 < b < 1$



Características:

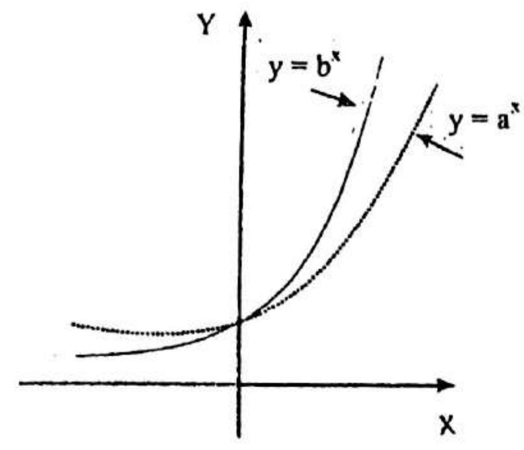
1) $0 < b < a < 1$

2) $\forall x \in \langle -\infty, 0 \rangle$: $a^x < b^x$

3) $\forall x \in \langle 0, \infty \rangle$: $a^x > b^x$

4) En $x = 0$: $a^x = b^x = 1$

Caso II: Si $a > 1$, $b > 1$



Características:

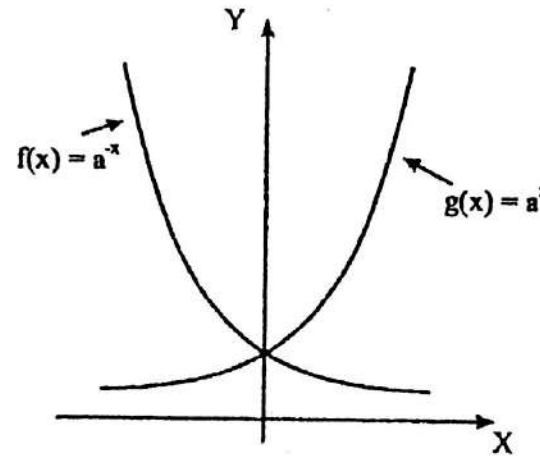
1) $1 < a < b$

2) $\forall\ x \in \langle -\infty, 0 \rangle$: $a^x > b^x$

3) $\forall\ x \in \langle 0, \infty \rangle$: $a^x < b^x$

4) En $x = 0$: $a^x = b^x = 1$

Caso III: Si $a > 1$



Características:

1) $\forall\ x \in \langle -\infty, 0 \rangle$: $a^x < a^{-x}$

2) $\forall\ x \in \langle 0, \infty \rangle$: $a^x > a^{-x}$

3) En $x = 0$: $a^x = b^{-x} = 1$

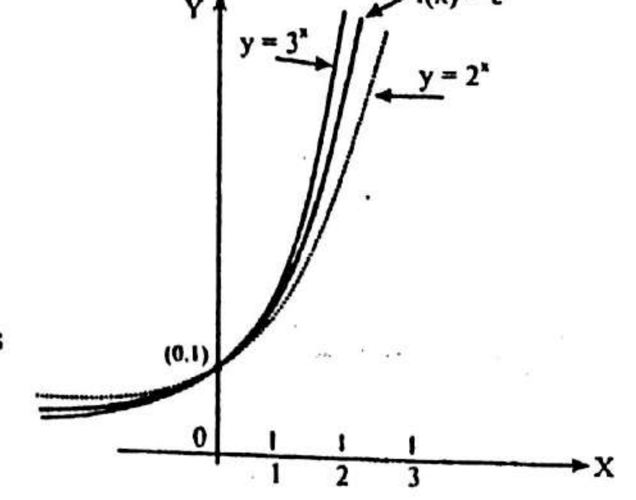
4) Las gráficas de f y g son simétricas respecto al eje y.

La base "e":

Muchos problemas que surgen en la naturaleza necesitan de una función exponencial cuya base es un número irracional simbolizado por e, el cual tiene un valor aproximado de $e = 2.7182818284590...$ posteriormente en el capítulo de sucesiones y series veremos que este número puede ser definido utilizando la idea de límite.

Gráfica de la función exponencial natural, $f(x) = e^x$

Siendo e un valor comprendido entre 2 y 3, la gráfica de $f(x) = e^x$ estará entre las gráficas de $y = 2^x$ e $y = 3^x$.



Sus propiedades son las mismas que las de la función $f(x) = a^x$, para $a > 1$.

5.2 FUNCION LOGARITMICA

Puesto que la función exponencial $f(x) = a^x$, tal que $f : R \rightarrow R^+$ es una función inyectiva en todo su dominio, tiene entonces una función inversa a la que denominaremos *función logaritmo.*

DEFINICIÓN 2

Sea $a > 0$, $a \neq 1$, se llama función logarítmica de base a, denotada por

$$y = f(x) = \log x, \quad \forall x > 0$$

a la inversa de la función exponencial en base a.

Es decir:

$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$$

Por lo tanto:

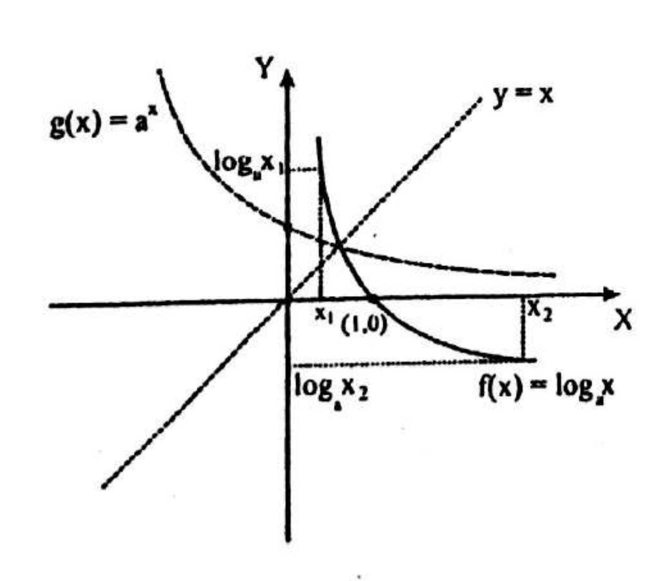
$$\text{Dom}(\log_a x) = \text{Ran}(a^x) = R^+ = \langle 0, \infty \rangle$$

$$\text{Ran}(\log_a x) = \text{Dom}(a^x) = R = \langle -\infty, \infty \rangle$$

$\therefore$ $f(x) = \log_a x$ es tal que $f : R^+ \rightarrow R$ y se lee: logaritmo de x en base a.

Gráfica de la función logarítmica a partir de la propiedad de la función inversa.

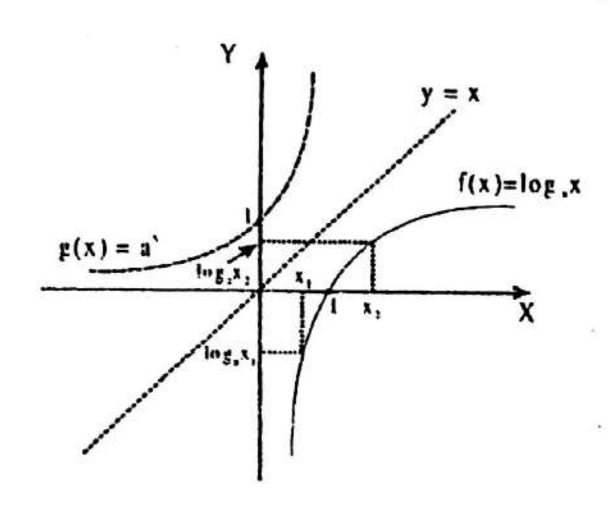
a) Cuando la base $a \in \langle 0, 1 \rangle$



Características:

1) $Df = \langle 0, \infty \rangle$
2) $Rf = \mathbb{R}$
3) Monotonía: Estrictamente decreciente
4) Interceptos con los ejes: (1,0)
5) Asíntota vertical: $x = 0$
6) Es inyectiva
7) Si $0 < x < 1 \rightarrow \log_a x > 0$
8) Si $x > 1 \rightarrow \log_a x < 0$
9) Si $x = 1 \rightarrow \log_a x = 0$
10) Si $0 < x_1 < x_2$ entonces $\log_a x_1 > \log_a x_2$
11) $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
12) Los gráficos de f y g son simétricos respecto a la recta $y = x$

b) Cuando la base $a \in \langle 1, \infty \rangle$

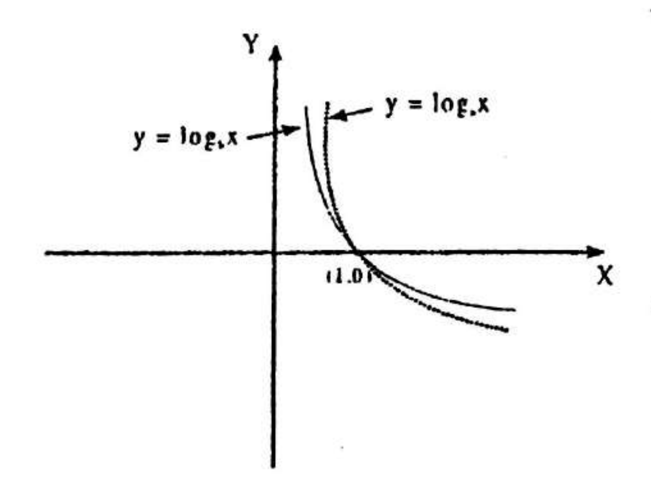


Características:

1) $Df = \langle 0, \infty \rangle$
2) $Rf = \mathbb{R}$
3) Monotonía: Estrictamente decreciente
4) Interceptos con los ejes: (1,0)
5) Asíntota vertical: $x = 0$
6) Es inyectiva
7) Si $0 < x < 1 \rightarrow \log_a x < 0$
8) Si $x > 1 \rightarrow \log_a x > 0$
9) Si $x = 1 \rightarrow \log_a x = 0$
10) Si $0 < x_1 < x_2$ entonces $\log_a x_1 > \log_a x_2$
11) $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
12) Las gráficas de f y g son simétricas respecto a la recta $y = x$

Propiedades derivadas de la comparación de las gráficas de dos funciones logarítmicas

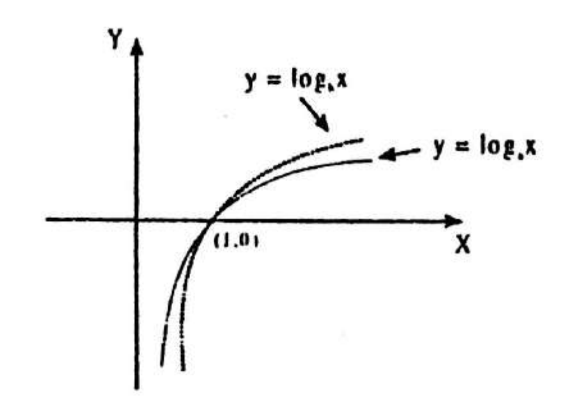
Caso I: Si $0 < a < 1$, $0 < b < 1$



Características:

1) $0 < b < a < 1$
2) $\forall\, x \in \langle 0, 1 \rangle$: $\log_a x > \log_b x$
3) $\forall\, x \in \langle 1, \infty \rangle$: $\log_a x < \log_b x$
4) Si $x = 1$: $\log_a x = \log_b x = 0$

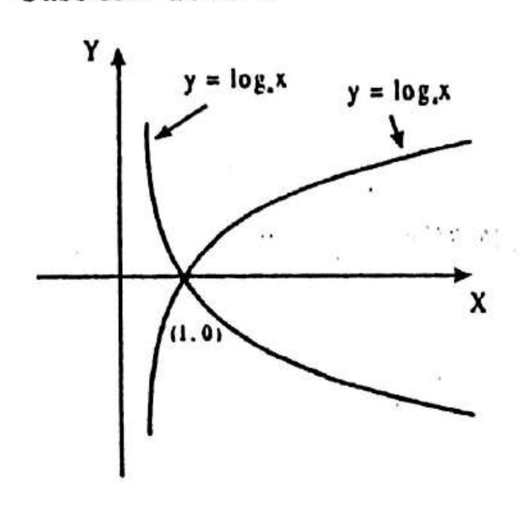
Caso II: Si $a > 1$, $b > 1$



Características:

1) $1 < a < b$
2) $\forall\, x \in \langle 0, 1 \rangle$: $\log_a x > \log_b x$
3) $\forall\, x \in \langle 1, \infty \rangle$: $\log_a x < \log_b x$
4) Si $x = 1$: $\log_a x = \log_b x = 0$

Caso III: Si $a > 1$



Características:

1) $\forall\ x \in \langle 0, 1\rangle$: $\log_a x < \log_{a^{-1}} x$

2) $\forall\ x \in \langle 1, \infty\rangle$: $\log_a x > \log_{a^{-1}} x$

3) En $x = 0$: $\log_a x < \log_{a^{-1}} x = 0$

4) Existe simetría respecto al eje x.

5.3 SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES Y NATURALES

DEFINICIÓN 3

Un sistema de logaritmos de base a, es el conjunto de todos los logaritmos de los números reales positivos en base a, tal que $a > 0$, $a \neq 1$.

EJEMPLO 1

$A = \{y \in R\ /\ y = \log_3 x,\ x \in R^+\}$ . . . es un sistema de logaritmos de base 3

$B = \{y \in R\ /\ y = \log_{0,3} x,\ x \in R^+\}$ . . . es un sistema de logaritmos de base 0,3

Por lo tanto, como hay infinitas bases de logaritmos, hay . . . sistemas de logaritmos.

Sistema de logaritmos decimales o vulgares

Utiliza la base 10, es decir: $A = \{y \in R\ /\ y = \log_{10} x,\ \forall\ x \in R^+\}$

Notación:

$\log_{10} x = \log x$, se lee logaritmo decimal de x

Sistema de logaritmos naturales o neperianos

Utiliza como base el número irracional 2,71828..., simbolizado por e.

Es decir: $A = \{y \in R\ /\ y = \log_e x,\ \forall\ x \in R^+\}$

Notación:

$\log_e x = \ln x$, se lee logaritmo natural o neperiano de x

Propiedades comunes a los logaritmos de cualquier base

Siendo $y = \log_a x \rightarrow a^y = x$

$$\boxed{a^{\log_a x} = x} \quad \forall\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$$

Adicionalmente:

1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N,$ $\quad\forall a > 0,\ a \neq 1,\ \forall M, N \in \mathbb{R}^+$

2) $\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N,$ $\quad\forall a > 0,\ a \neq 1,\ \forall M, N \in \mathbb{R}^+$

3) $\log_a a = 1,$ $\quad\forall a > 0,\ a \neq 1$

4) $\log_a 1 = 0,$ $\quad\forall a > 0,\ a \neq 1$

5) $\log_{a^r} N^t = \dfrac{t}{r}\log_a N$ $\quad\forall a > 0,\ a \neq 1, N > 0,\ r \neq 0$

6) $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$ ...Cambio de base $\quad\forall a, b > 0;\ a, b \neq 1,\ N > 0$

7) $\log_a b \cdot \log_b N = \log_a N,$ $\quad\forall a, b > 0,\ a, b \neq 1,\ N > 0$

8) $a^{\log_b N} = N^{\log_b a},$ $\quad\forall a, b > 0,\ b \neq 1,\ N > 0$

Conversión de logaritmos decimales a logaritmos naturales

Sabemos que: $\quad\log_e x = \dfrac{\log x}{\log e} = \dfrac{1}{\log e}\cdot \log x$

Luego: $\quad\ln x = 2{,}3026 \log x$

5.4 COLOGARITMO Y ANTILOGARITMO

a) Cologaritmo:

Se denomina cologaritmo de un número en una base dada al logaritmo de la inversa del número en la misma base.

Notación:

$\text{co}\log_a x$ se lee cologaritmo de x en base a o cologaritmo en base a de x

Por definición: $\quad\text{colog}_a x = \log_a(1/x),\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall a > 0,\ a \neq 1.$

También: $\quad\text{co}\log_a x = \log_{1/a} x = -\log_a x$

EJEMPLO 1

$\text{colog}_2 8 = -\log_2 8 = -3$

$\text{colog } 1 = -\log 1 = 0$

$\text{coln}(1/e) = -\ln(1/e) = -(-1) = 1$

a) Antilogaritmo

Dado el logaritmo de un número en una base dada, se denomina antilogaritmo al número del logaritmo en mención.

Es decir:

Si $\log_a x = y$ entonces $x = a^y$ es el antilogaritmo y se denota por:

$\text{Antilog}_a y$ y se lee antilogaritmo de y en base a o antilogaritmo en base a de y.

Luego:

$$\text{antilog}_a y = a^y,\ \forall a > 0,\ a \neq 1,\ \forall y \in R$$

EJEMPLO 2

$$\text{antilog}_2 -3 = 2^{-3} = 1/8$$

$$\text{antilog } 0 = 10^0 = 1$$

$$\text{antilog } 2 = e^2$$

Propiedades que relacionan los logaritmos y cologaritmos con el antilogaritmo

1) $\log_a \text{anti}\log_a x = x,\qquad \forall a > 0,\ a \neq 1,\ x \in R$

2) $\text{anti}\log_a \log_a x = x,\qquad \forall a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$

3) $\text{co}\log_a \text{anti}\log_a x = -x,\qquad \forall a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$

4) $\text{anti}\log_a \text{co}\log_a x = 1/x,\qquad \forall a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$

5.5 PROPIEDADES DEL LOGARITMO DECIMAL

Para efectos de operaciones numéricas con logaritmos se pueden usar tablas que dan sus valores, así como asistentes matemáticos tales como *derive* o simplemente una calculadora científica.

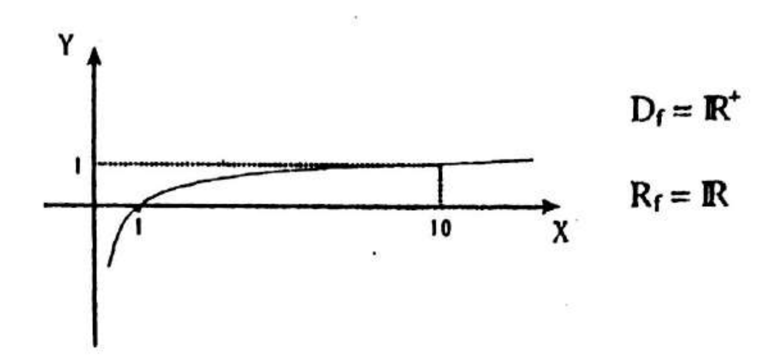
Todos los valores de logaritmos en base diferente de 10 pueden expresarse mediante la fórmula del cambio de base a base 10 (también se puede llevar a base e) que ya ésta tabula en el caso de que se use las tablas o que es reconocida por la calculadora.

De ahí la importancia de su estudio.

EJEMPLO 3

$$\log_{0,5} 7 = \frac{\log 7}{\log 0,5}$$

si graficamos y = log x llegaremos a:



$D_f = \mathbb{R}^+$

$R_f = \mathbb{R}$

Luego:

a) Si $0 < x < 1 \rightarrow \log x < 0$

b) Si $x > 1 \rightarrow \log x > 0$

c) Si $x = 1 \rightarrow \log x = 0$

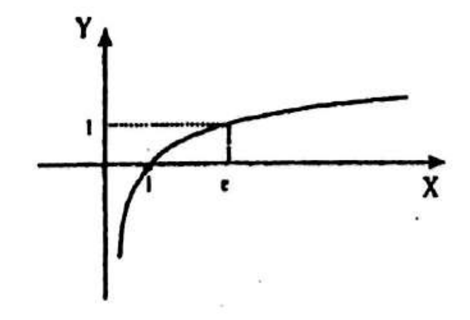
Propiedades del logaritmo natural

Al igual que en el caso anterior, todos los logaritmos en base distinta de e pueden expresarse mediante la fórmula del cambio de base a base e. Esta base es muy frecuente encontrarla en una gran cantidad de fórmulas.

EJEMPLO 4

$$\log_{0,8} 7{,}2 = \frac{\ln 7{,}2}{\ln 0{,}8}$$

Si graficamos y = lnx, se tendrá:



$D_f = \mathbb{R}^+$

$R_f = \mathbb{R}$

Luego:

a) Si $0 < x < 1 \rightarrow \ln x < 0$

b) Si $x > 1 \rightarrow \ln x > 0$

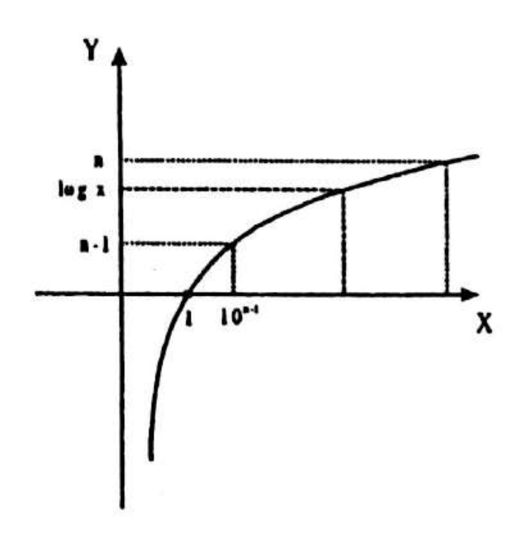
c) Si $x = 1 \rightarrow \log x = 0$

5.6 CARACTERISTICA Y MANTISA DE UN LOGARITMO DECIMAL

a) Sea: $y = \log x,\ x \in \langle 1,\infty \rangle$

Además $x = \underbrace{e_1e_2\ldots\ldots\ldots e_n}_{\text{parte entera}};\ \underbrace{d_1d_2\ldots\ldots\ldots}_{\text{parte decimal}}$ un número con "n" cifras en su parte entera.

Siendo: $10^{n-1} < x < 10^n,\ \forall n \in Z^+$ y como la gráfica de esta función ès:



Se deduce que:

$$\log x = \underbrace{(\ n - 1\ )}_{\substack{\text{entero}\\ \text{positivo}\\ c}} + \underbrace{\text{Fracción propia positiva}}_{\text{decima}}$$

$$\therefore\ \log x = c + m \ \left\langle \begin{array}{l} c : \text{característica} \\ m : \text{mantisa} \end{array}\right.$$

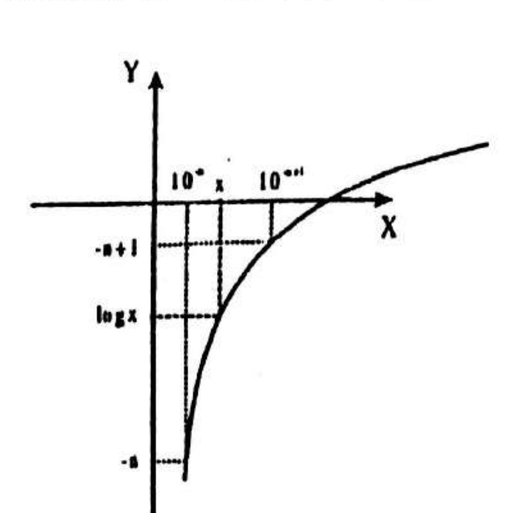
Ejm: $\log 425{,}89 \approx 2{,}62930 \rightarrow c = 2,\ m = 0{,}62930$

b) Sea $y = \log x,\ x \in \langle 0,\ 1\rangle$

Además $x = \underbrace{0{,}00\ldots\ldots\ldots0}_{n\ \text{ceros}}\,pq\ldots\ldots\ldots$, un número decimal con "n" ceros antes de su primera cifra significativa (p)

Primera cifra significativa p≠0

Siendo: $10^{n-1} < x < 10^{n+1},\ \forall n \in Z^+$ y como la gráfica de esta función es:



Se deduce que:

$$\log x = \underbrace{-\ n}_{\substack{\text{entero}\\ \text{negativo}\\ c}} + \underbrace{\text{fracción propia positiva}}_{\text{decimal}}$$

$$\therefore\ \log x = c + m \ \left\langle \begin{array}{l} c : \text{característica} \\ m : \text{mantisa} \end{array}\right.$$

lo cual también se denota por:

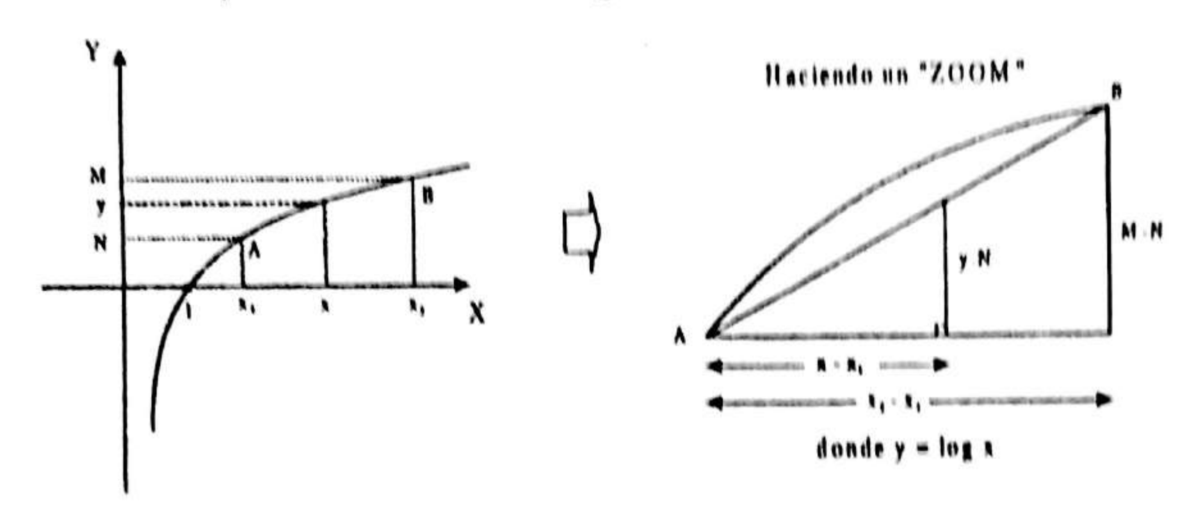
$$\log x = \bar{c}, m$$

EJEMPLO 1

$$\text{Log } 0{,}0372 = -1{,}02774$$
$$= -2 + 1 - 0{,}02774$$
$$= -2 + 0{,}97226$$
$$\therefore \log 0{,}0372 = \bar{2}{,}97226$$

Interpolación:

Dados el $\log x_1 = N$, $\log x_2 = M$, se pide calcular el $\log x$, siendo $x_1 < x < x_2$. Si $x_1 \approx x \approx x_2$, entonces podemos calcular el valor aproximado del $\log x$, utilizando para esto una recta como aproximación de la curva logarítmica.



Por semejanza de triángulo: $\dfrac{y - N}{x - x_1} = \dfrac{M - N}{x_2 - x_1} \rightarrow y = \dfrac{M - N}{x_2 - x_1}.(x - x_1) + N$

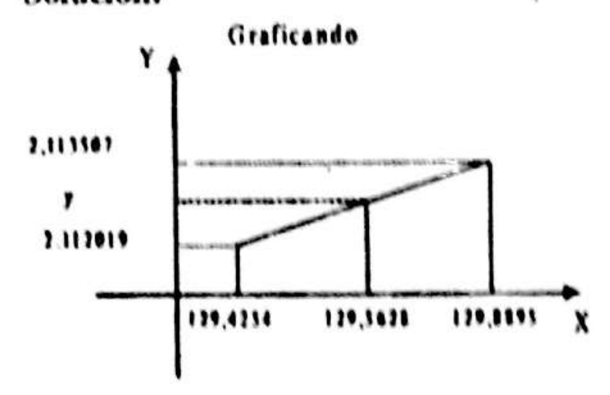
EJEMPLO 2

Si $\log 129{,}8695 = 2{,}113507$

$\log 129{,}4254 = 2{,}112019$

Determinar el valor de $\log 129{,}5628$.

Solución:



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{y - 2{,}112019}{2{,}113507 - 2{,}112019} = \frac{0{,}5628 - 0{,}4254}{0{,}8695 - 0{,}4254}$$

$$y \approx 2{,}112480$$

$$\therefore \log 129{,}5628 \approx 2{,}112480$$

5.7 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Puesto que la función exponencial y la función logarítmica son inyectivas en todo su dominio, entonces por la definición de función inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \ \forall x_1, x_2 \in Df$$

luego:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \ \forall\, a > 0, \ a \neq 1, \ x_1, x_2 \in R$$

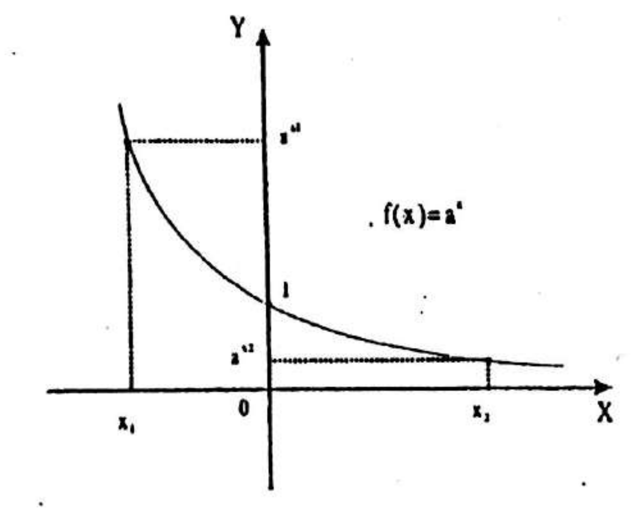
$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \ \forall a > 0, \ a \neq 1, \ x_1, x_2 \in R^+$$

Significado gráfico:

Estas inecuaciones se basan en la definición de función estrictamente creciente o estrictamente decreciente, que son las características de ambas funciones

Inecuaciones exponenciales:

1er Caso: Cuando la base $a \in <0, 1>$

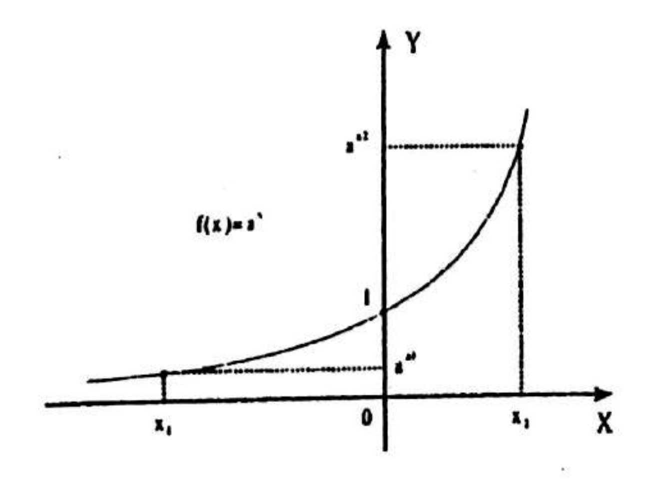


f es estrictamente decreciente $\forall x \in Df = R$

$a^{x_1} > a^{x_2} \leftrightarrow x_1 < x_2, \ \forall x \in Df = R$

$a^x > 0, \ \forall\, x \in R$

2do Caso: Cuando la base $a \in <1, \infty>$



f es estrictamente decreciente $\forall x \in Df = R$

$a^{x_1} < a^{x_2} \leftrightarrow x_1 < x_2, \ \forall x_1, x_2 \in R$

$a^x > 0, \ \forall\, x \in R$

5.8 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

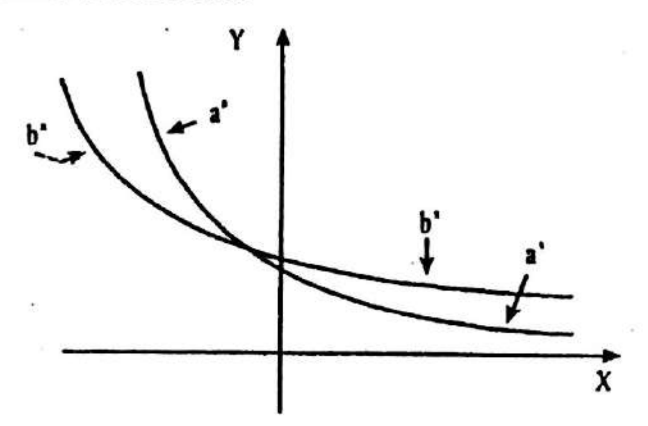
I) Si $0 < a < b < 1$ entonces $a^x > b^x$, $\forall\, x > 0$

II) Si $1 < a < b$ entonces $a^x > b^x$, $\forall\, x < 0$

III) Si $0 < a < 1$ entonces $a^x < \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

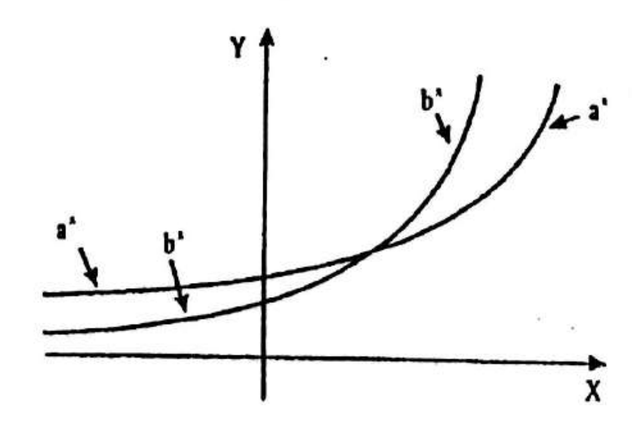
Solución:

1) Mediante la exponencial decreciente:



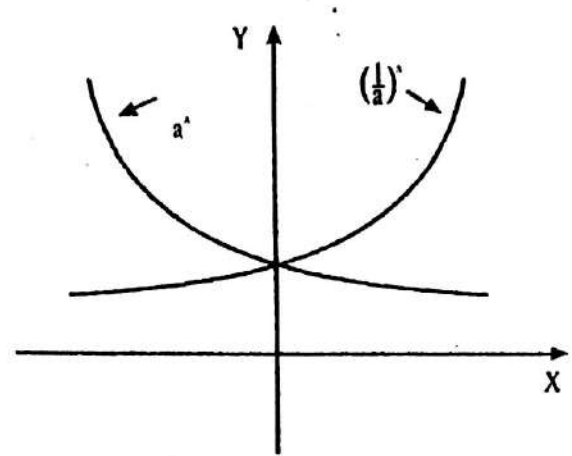
$\Rightarrow a^x < b^x \quad \forall\, x > 0 \quad \therefore$ I) es F.

2) Mediante la exponencial creciente



$\Rightarrow a^x > b^x, \quad \forall\, x < 0 \quad \therefore$ III) es F

Graficando a^x, $\left(\frac{1}{a}\right)^x$, $0 < a < 1$



$$a^x < \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \qquad\qquad \therefore \text{ III) es F}$$

4) Finalmente: El valor de verdad es FVF

PROBLEMA 2

Indique la verdad o falsedad (V) o (F) respectivamente, de las siguientes proposiciones:

I) $\log x^2 = 2\log x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

II) $\log_b a \cdot \log_a b = 1, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

III) $\log_a M \cdot \log_a N = \log_a(M + N)$

Solución:

1) $\log x^2 = 2\log x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (F); pues en $x = 0$ y $x < 0$ no existen logaritmos reales.

2) $\log_b a \cdot \log_a b = 1$, $\forall$ a, $b \in \mathbb{R}^+$, (F) ; si $a = 1$ la igualdad carece de sentido.

3) $\text{Log}_a M \cdot \log_a N = \log_a(M+N)$, (F).

PROBLEMA 3

Indicar el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I) $\log_{0.001} 0{,}001 > 1$

II) Si $f(x) = \log_{0,5}(e^{2x} + e^x - 2) \Rightarrow Df = \mathbb{R}$

III) Si $g(x) = \left|3^{|x|-x}\right| \Rightarrow Rf = [1, 8\rangle$

Solución:

1) Podemos escribir:

$$\log_{10^{-2}} 10^{-3} = \frac{-3}{-2}\log_{10} 10 = \frac{3}{2} > 1, \qquad \text{I) V}$$

2) Análisis del antilogaritmo de f(x):

$$e^{2x} + e^{x} - 2 > o \Rightarrow \left(e^{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} > 0$$

$$\Rightarrow \left(e^{x} + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{9}{4} \Rightarrow \left|e^{x} + \frac{1}{2}\right| > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow e^{x} + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \vee e^{x} + \frac{1}{2} < -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{x} > 1}_{x>0} \vee \underbrace{e^{x} < -2}_{x \in \emptyset} \Rightarrow Df = (1,\infty) \qquad \text{II) F}$$

3) Análisis de la 2da. proposición:

$$g(x) = \left|\underbrace{3^{|x|-x}}_{\text{positivo}}\right| = 3^{|x|-x} = \begin{cases} 3^{x-x} = 1, & x \geq 0 \Rightarrow Rf_{I} = 1 \\ 3^{-x-x} = 3^{-2x}, & x < 0 \Rightarrow Rf_{II} = \langle 1, \infty\rangle \end{cases}$$

$$Rf = Rf_{I} \vee Rf_{II} = \{1\} \cup \langle 1, \infty\rangle = [1, \infty\rangle \qquad \text{III) V}$$

PROBLEMA 4

Hallar el rango de la función definida por:

$$f(x) = e^{-|x|-1}$$

Solución:

1) Definiendo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-1} & \text{si } x \geq 0 \text{ (Exp. decreciente)} \\ e^{x-1} & \text{si } x < 0 \text{ (Exp. creciente)} \end{cases}$$

2) Obtengamos el rango:

$$Df: x < 0 \vee x \geq 0$$
$$\Rightarrow e^{x} < e^{0} \vee e^{x} \geq e^{0}$$
$$\Rightarrow e^{x-1} < e^{-1} \vee e^{-x} \leq 1$$
$$\Rightarrow e^{x-1} < e^{-1} \vee e^{-x-1} \leq e^{-1}$$
$$\Rightarrow \underbrace{0 < e^{x-1} < e^{-1}}_{\text{Rango I}} \vee \underbrace{0 < e^{-x-1} \leq e^{-1}}_{\text{Rango II}}$$

3) Finalmente:

$$0 < \underbrace{e^{-|x|-1}}_{f(x)} \leq e^{-1}$$

$$\therefore Rf = \langle 0, e^{-1}]$$

PROBLEMA 5

Hallar el dominio de la función f definida por:

$$f(x) = \sqrt{\log x - 1} + x + 1$$

Solución:

1) De la regla de correspondencia

$$f(x) = \sqrt{\underbrace{\log x - 1}} + x + 1$$

$$\leftrightarrow \underbrace{\log x - 1 \geq 0 \wedge x > 0}$$

2) Resolviendo el sistema:

$$\Rightarrow \log x \geq 1 \;\wedge\; x > 0$$

$$\Rightarrow \quad x \geq 10 \;\wedge x > 0$$

$$\Rightarrow \quad x \geq 10$$

$$\Rightarrow \quad x \in [10, \infty\rangle$$

$$\therefore\ Df = [10, \infty\rangle$$

PROBLEMA 6

La siguiente función: $f : [a, 8] \rightarrow [b, b + 2]$, definida por $f(x) = \log_2 x$ es sobreyectiva, hallar $a + b$.

Solución:

1) A partir del dominio $a \leq x \leq 8 \;\wedge a > 0$

2) Conformando la regla de correspondencia:

$$\Rightarrow \log_2 a \leq \log_2 x \leq \log_2 2^3,\ a > 0$$

$$\Rightarrow \log_a a \leq \underbrace{\overbrace{\log_2 x}}_{\text{logarfunica creciente}} \leq 3,\ \ a > 0$$

3) Por ser suryectiva: $Rf = [\log_2 a, 3] = [b, b + 2]$

$$\Rightarrow \log_2 a = b \;\wedge\; 3 = b + 2$$

$$\Rightarrow \log_2 a = 1 \;\wedge \qquad b = 1$$

$$\Rightarrow \quad a = 2 \;\wedge \qquad b = 1$$

$$\therefore\ a + b = 3$$

PROBLEMA 7

Hallar la suma de los cuadrados de los elementos del conjunto

$$S = \{x > 0 / x^{x^2-7x+12} = 1\}$$

Solución:

1) De la condición:

$$x^{x^2-7x+12} = x^0 \wedge x > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \wedge x > 0$$

x ↘↗ -4
x ↗↘ -3

$$\Rightarrow (x - 4 = 0 \vee x - 3 = 0) \wedge x > 0$$

$$\Rightarrow (x = 4 \quad \vee \quad x = 3) \wedge x > 0$$

2) Solución trivial: x = 1

$$\Rightarrow S = \{1, 3, 4\}$$

3) Finalmente:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 + 9 + 16 = 26$$

PROBLEMA 8

Determine el producto de los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$2 \log_x 4 + 3 \log_8 x = 5$$

Solución:

1) Ordenando:

$$\Rightarrow 2 \log_x 2^2 + 3 \log_{2^3} x = 5$$

$$\Rightarrow 4 \log_x 2 + \frac{3}{3} \log_2 x = 5$$

2) Hacemos el cambio: $\log_2 x = m$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{1}{m}\right) + m = 5$$

$$\Rightarrow m^2 - 5m + 4 = 0$$

m ↘↗ -4 $\Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$
m ↗↘ -1 $\Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

1) Restituyendo:

$$\Rightarrow \log_2 x = 4 \vee \log_2 x = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = 2^4 \quad \vee \quad x = 2^1$$

$$\Rightarrow \quad x = 16 \quad \vee \quad x = 2$$

$$\therefore x_1 x_2 = 32$$

PROBLEMA 9

Dada la función $f(x) = e^{mx+n-\pi}$ cuya gráfica es la mostrada donde $e = 2{,}71828...$

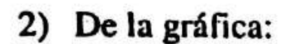
Si $mx + 3n > 10\pi$,

obtener x.

Solución:



1) Se trata de una exponencial decreciente, luego $m < 0$.



2) De la gráfica:

$$\text{Si} \quad x = 0 : f(0) = e^{0+n-\pi} = e^{\pi}$$

$$\Rightarrow n - \pi = \pi \Rightarrow n = 2\pi$$

3) De la condición: $n = 2\pi$

$$\Rightarrow mx + 3(2\pi) > 10\pi \wedge m < 0$$

$$\Rightarrow mx > 4\pi \wedge m < 0$$

$$\Rightarrow x < \frac{4\pi}{m}$$

PROBLEMA 10

Determinar la gráfica de la función f cuya regla de correspondencia está definida por:

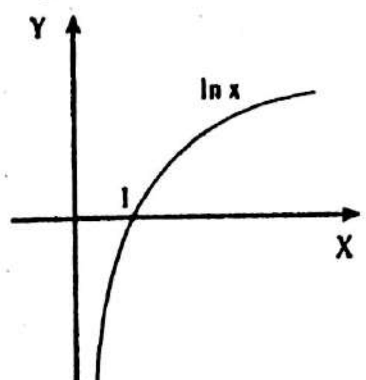
$$f(x) = \ln(2 - x) + 1$$

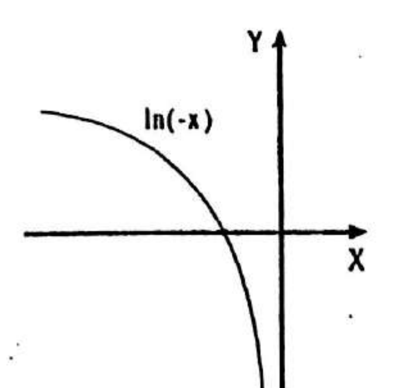
Solución:

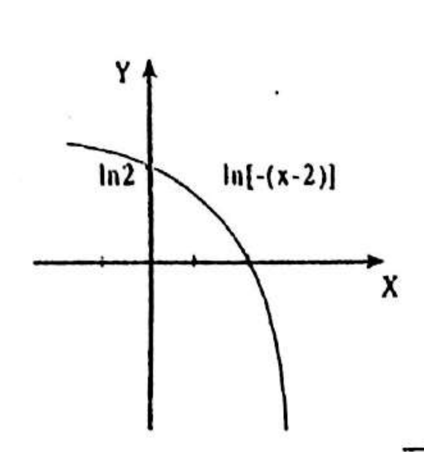
1) Aplicando traslaciones; mediante la secuencia:

$$\ln x \rightarrow \ln(-x) \rightarrow \ln[-(x-2)] \rightarrow \ln[2-x] + 1$$

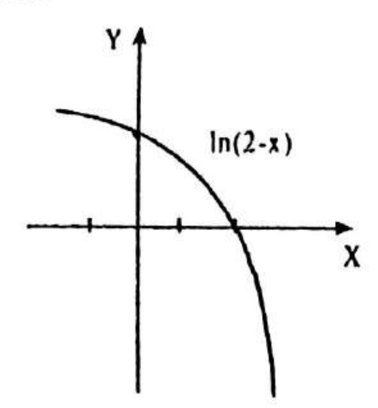
2) Obtendremos:

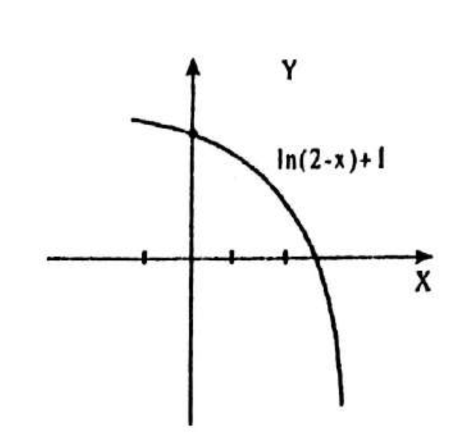






4) Finalmente:





PROBLEMA 11

Determinar el número de raíces o soluciones de la ecuación:

$$|\operatorname{sen}x| = |\ln|x - \pi||$$

Solución:

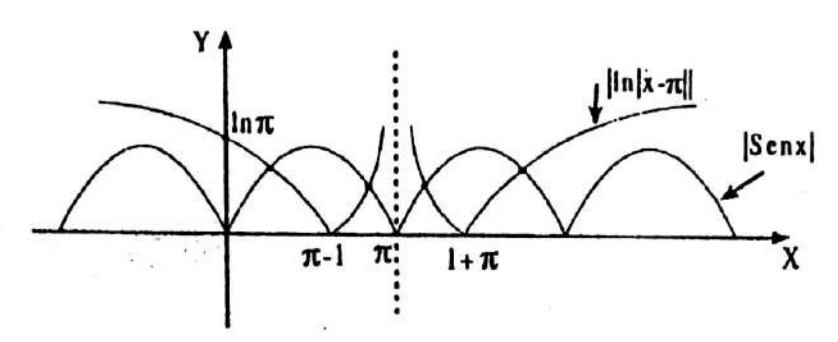
1) Esbozo gráfico:

$|\operatorname{sen}x| \Rightarrow$

$\ln|x - \pi| \Rightarrow$

$|\ln|x - \pi|| \Rightarrow$

2) Intersecciones = 4 ⇒ 4 soluciones.



PROBLEMA 12

Hallar el dominio de la función:

$$f : x \to \log_{-x+11}(x^2 + 4x - 77)$$

Solución:

1. De los datos:

$$f(x) = \log_{-x+11}[(x-7)(x+11)]$$

2. Por definición:

$$\leftrightarrow \underbrace{(x=7)(x+11)}_{\text{antilogaritmo}} > 0 \wedge \underbrace{[-x+11>0 \wedge -x+11 \neq 1]}_{\text{base del sistema}}$$

3. Resolviendo

-11 7

∧

11

10

4. Finalmente: $\therefore x \in \langle -\infty, -11\rangle \cup \langle 7, 10\rangle \cup \langle 10, 11\rangle$

PROBLEMA 13

Si: $h(x) = 3 - 3|x-1|^2 - 2^{|x-1|}$, $x \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$. Determine el máximo valor de h(x).

Solución:

1) Haciendo:

$$h(x) = f(x) + g(x),$$

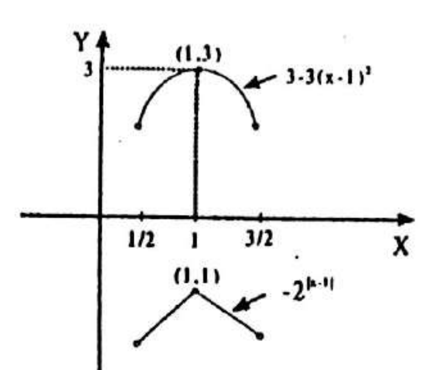
donde: $f(x) = 3 - 3|x-1|^2$ parábola invertida de vértice (1, 3)

$$f(x) = 3 - 3(x-1)^2$$

2) Además:

$g(x) = -2^{|x-1|}$ **exponencial de imágenes negativas y vértice en (1, -1)**

3)



4) El máximo valor ocurre en la suma de los vértices: $\therefore\ h(x)_{max} = 3+(-1) = 2$

PROBLEMA 14

Se tiene la función: $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$, $a > 1$, $x \in [1, \infty\rangle$. Hallar el rango de f.

Solución:

1) De los datos: $x \geq 1 \wedge a > 1$
   Arreglos:

$$f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x + 1} - \frac{2}{a^x + 1} - \frac{2}{a^x + 1} = 1 - \frac{2}{a^x + 1}$$

2) Conformando f(x) a partir de los datos:

$$x \geq 1 \Rightarrow a^x \geq a^1$$

$$\Rightarrow a^x + 1 \geq a + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^x + 1} \leq \frac{1}{a + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{a^x + 1} \geq \frac{-2}{a + 1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overbrace{1 - \frac{2}{a^x + 1}}} \geq 1 - \frac{2}{a + 1}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{a + 1 - 2}{a + 1} = \frac{a - 1}{a + 1}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{a - 1}{a + 1}$$

3) Finalmente:

$$Rf = \left[\frac{a - 1}{a + 1}, \infty\right\rangle$$

PROBLEMA 15

En cierta ciudad de población A, el 20% de los residentes escucharon un anuncio por radio acerca de un suceso político local. Después de "t" horas, f(t) personas sabían del comentario.

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Si el 50% de la población supo del suceso después de una hora. ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que el 80% de la población se enteró de la noticia?

Solución:

1) De los datos

$$\text{Si } t=0 : 0{,}2A = \frac{A}{1 - Be^{-k(0)}} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{1+B} \Rightarrow B = 4$$

$$\text{Si } t=1 : 0{,}5A = \frac{A}{1 + Be^{-k}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1+4e^{-k}}$$

$$\Rightarrow 1 + 4e^{-k} = 2 \Rightarrow e^{-k} = 2^{-2} \Rightarrow k = \ln 4$$

2) Se logra:

$$f(t) = \frac{A}{1 + 4e^{-(\ln 4)t}} = \frac{A}{1 + 4^{1-t}}$$

3) Si $f(t) = 0{,}8A$

$$\Rightarrow 0{,}8A = \frac{A}{1+4^{1-t}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{1+4^{1-t}}$$

$$\Rightarrow 4 + 4^{2-t} = 5 \Rightarrow 4^{2-t} = 1 \Rightarrow 4^{2-t} = 4^{0}$$

$$\Rightarrow 2 - t = 0 \Rightarrow t = 2\text{hrs.}$$

5.9 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Determinar el valor de verdad de las afirmaciones siguientes:

I) $\log_{0,3} 0{,}2 > \log_{0,4} 0{,}2$

II) $\log_{2} 0{,}3 > \log_{3} 0{,}3$

III) $\log_{0,3} 0{,}2 > \log_{0,2} 0{,}3$

PROBLEMA 2

Si (β, 1) pertenece a la gráfica de la función: $f(x) = e^{x+2} - \sqrt{|1-e|}^{\ln e^2}$

Calcular: $E = \ln\left||\beta| + 1\right|$.

PROBLEMA 3

Hallar el dominio de la función: $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{e^{|x+1|} - \ln|x+1|}$

PROBLEMA 4

Hallar el rango de la función definida por:

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right) \ \forall x \in [4, 6]$$

PROBLEMA 5

Si: $\alpha = \log_{12} 18$, $\beta = \log_{24} 54$. Calcular: $E = \alpha\beta + 5(\alpha - \beta)$

$$f(x) = \sqrt{\log x - 1} + x + 1$$

PROBLEMA 6

Si

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 2^x\}$$

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ln_{1/4} x \leq y\}$$

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 8 \wedge y \geq 0\}$$

Determinar la región equivalente: Si $E \cap F \cap G$

PROBLEMA 7

Hallar S si $\forall x \in S$:

$$5 \log x^{3\ln x} . \ln 10 - \log_3 x^{\ln 3^{11}} = -2$$

PROBLEMA 8

Resolver:

$$\left(\log_2(2^x - 2)\right)\left(\log_{1/2}(2^{x+1} - 4)\right) > -2$$

PROBLEMA 9

Hallar el dominio de la función inversa de:

$$f(x)=\frac{10^x}{1+10^x}$$

PROBLEMA 10

Determinar el conjunto A:

$$A=\left\{(x,y)\in R^2 / 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=512 \wedge \log\sqrt{xy}=1+\log_2\right\}$$

5.10 TEST DE AUTOEVALUACION

PROBLEMA 1

Hallar el valor de verdad de las afirmaciones siguientes:

I) $\exists\, x \in \mathbb{R}^+ / 9^x - 4(3^x) - 5 = 0$

II) $5^{-x} < 3^{-x} \leftrightarrow x > 0$

III) Sea $f: R \rightarrow R$, con $f(x) = 3^{-|x-2|}$. Luego f es una función par.

PROBLEMA 2

Determinar la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{-1}{e^{2x}-2e^x+1}$$

PROBLEMA 3

Si $\forall\, x \in S$: $4^{\log(2-|x|)} = 2^{\log(2-|x|)+1} - 1$. Obtener S.

PROBLEMA 4

Determinar la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{-1}{\log x^{\log x}-2\log x+1}$$

PROBLEMA 5

Determinar la función inversa de:

$$f(x) = \ln(1 - x) + 2$$

PROBLEMA 6

Hallar la suma de los cuadrados de todos los elementos que cumplen con:

$$E = \left\{(x, y) / 3^x - 2^{y^2} = 77 \wedge 3^{x/2} - 2^{y^2/2} = 7\right\}$$

PROBLEMA 7

Si $f(x) = 3^x, \quad x \geq 0$

$g(x) = 3^{-x}, \quad x \geq 0$

indicar una afirmación respecto a la función $f - g$.

PROBLEMA 8

Dada la función: $f(x) = e^x - e^{|x|}$. Hallar el valor de verdad de las afirmaciones siguientes:

I) f es estrictamente creciente $\forall x \in \mathbb{R}$

II) $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

III) No existe f^*

PROBLEMA 9

La función $H : A \to \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, con $H(x) = 2^{1-|x|}$ sobreyectiva. Hallar A.

PROBLEMA 10

Sean: $f(x) = e^{\ln(100-x^2)^{1/2}}$

$g(x) = \sqrt{\log \ln(1/x)}$

Hallar: $\mathrm{Dom}g \cap \mathrm{Dom}f$

5.11 CLAVE DE RESPUESTAS

Problemas propuestos:

1) VVV

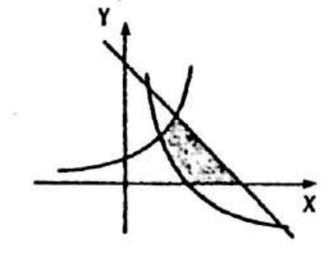
2) 1

3) $\langle 1, \infty \rangle$

4) $\left[\frac{1}{2}\log 2, \log 2\right]$

5) 1

6)



7) $\{e^{1/3}, e^{2/5}\}$

8) $\left\langle \log_2 \frac{9}{4}, 3 \right\rangle$

9) $\langle 0, 1 \rangle$

10) $\{(16, 25), (25, 16)\}$

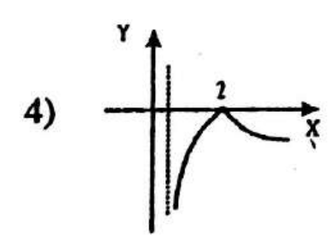
Test de autoevaluación

1) VVF

2)

3) $\{1, -1\}$

4)



5) $f^{*}(x) = 1 - e^{x-2}$

6) 36

7) estrictamente creciente

8) FVV

9) $[-2, 2]$

10) $\left\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right\rangle$



6.0 OBJETIVOS

El objetivo de este capítulo es presentar la teoría básica de los polinomios en una y varias variables, así mismo se tratan temas que son cercanos a la teoría de polinomios como son la factorización, los productos y cocientes notables, la radicación, etc. Sin embargo ponemos especial énfasis en los polinomios de una variable real por ser éstos de una gran importancia teórica y práctica.

6.1 CONCEPTOS GENERALES Y DEFINICIONES

En esta sección presentamos los conceptos e ideas básicas acerca de los polinomios. Empezamos dando una notación.

Notación: Con la letra k denotaremos a alguno de los siguientes conjuntos

- Q, conjunto de los números racionales
- R, conjunto de los número reales
- C, conjunto de los números complejos

DEFINICIÓN 1

Un monomio sobre k es una expresión de la forma

$$A\, x^m y^n z^k \dots w^l$$

Donde A es una constante en k, los exponentes m, n, k, . . . l son enteros negativos y x, y, z, . . . , w son variables que toman valores en k.

La constante A es el coeficiente del monomio. Si $A \neq 0$ entonces $r = m + n + k + \dots + l$ es el grado del monomio.

EJEMPLO 1

Monomio	Coeficiente	Grado
$5x^3$	5	3
$-\sqrt{2}x^2y^3$	$-\sqrt{2}$	5
$\frac{1}{2}x^2y^4z^3$	$\frac{1}{2}$	9
4	4	0, ya que $4 = 4*1 = 4*x^0$

DEFINICIÓN 2

Dos monomios del mismo grado y con las mismas variables afectadas de los mismos exponentes son llamados términos semejantes.

EJEMPLO 2

Los monomios $3x^2y^3z$, $-5x^2y^3z$ son términos semejantes.

DEFINICIÓN 3 **(Polinomios)**

Un polinomio en variables x, y, z, . . ., w es la suma de dos o más monomios de la forma $Ax^m y^n z^k \ldots w^l$ llamados término del polinomio y se denota por p(x, y, z, . . .,w).

EJEMPLO 3

a) $p(xy) = 3xy^3 - 5x^2y + xy + x + 2$

es un polinomio en dos variables sobre k.

b) $p(xyz) = 3x^8yz - \sqrt{2}\,x^2y + 3xz + 2$

es un polinomio en tres variables sobre k.

c) $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$.

$a_i \in k$, $n \geq 0$ es un número entero, $x \in k$ es un polinomio en una variable sobre k. Si $a_n = 1$, p(x) es llamado un polinomio mónico.

DEFINICIÓN 4 **(Grado de un polinomio)**

a) **Grado relativo:** Es el grado respecto a una variable, y está dado por el mayor exponente que tiene dicha variable en el polinomio.

a) **Grado absoluto:** Está dado por el monomio de mayor grado (con coeficiente distinto de cero) que aparece en el polinomio.

EJEMPLO 4

El polinomio

$$p(x,y,z) = 3x^2y^4z^3 + 5x^3y^2z + \sqrt{3}\,x^5\,y\,z^2, \quad x, y, z \in k$$

es con respecto a:

x : de quinto grado

y : de cuarto grado

z : de tercer grado

y de grado absoluto 9 ya que el término (monomio) $3x^2y^4z^3$ es el de mayor grado absoluto entre todos los demás monomios del polinomio.

Observaciones:

1) Cuando empleemos la palabra grado a secas, nos referimos al grado absoluto del polinomio.
2) Si todos los coeficientes del polinomio son nulos, el polinomio es llamado polinomio nulo (o polinomio cero) y en este caso diremos que carece de grado.
3) Si en la definición de polinomio, los exponentes pueden tomar valores arbitrarios (no necesariamente entero no negativo) la expresión resultante es llamada **expresión algebraica**, como por ejemplo:

$$2x^2y^3 + 5x^2y^4 + \sqrt{2}\,x^{1/2}y$$

6.2 POLINOMIOS ESPECIALES

En esta sección definimos algunos polinomios de cero frecuente y para los cuales existe una terminología de uso común.

1. **Polinomios homogéneos:** Son aquellos que tienen todos sus términos de igual grado.

EJEMPLO 1

a) $p(xy) = x^2 + xy + y^2$ es un polinomio homogéneo de grado 2

b) $q(xyz) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$ es un polinomio homogéneo de grado 3.

Una definición equivalente a la anterior es: El polinomio

$p(x,y,z,...w)$ es homogéneo de grado l si

$$p(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots, \lambda w) = \lambda^l p(x, y, z, \ldots, w), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación directa de ambas formas equivalentes de esta definición.

EJEMPLO 2

Si el polinomio $p(x,y) = x^{a-2b}y^{a+b} - 5x^by^{a+2b} + 7x^{a-b}y^8$ es homogéneo, calcular (a + b)ab.

Solución:

Se debe cumplir

$$2a - b = a + 3b = a - b + 8$$

de donde se obtiene: $a = 8,\ b = 2$

entonces: $(a + b)\,ab = 160$

EJEMPLO 3

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Si p(x, y) es homogéneo, entonces q(x, y) = p(x + 2y, 2x + y) es también homogéneo.

II) Si p(x, y) y q(x, y) son homogéneos del mismo grado, entonces p(x, y) + q(x, y) es también homogéneo del mismo grado.

III) Si q(x, y) es un polinomio homogéneo de grado 3 y q(1, 2) = 5, entonces q(-2, -4) = -40.

Solución:

I) Consideremos $q(\lambda x, \lambda y)$ el cual se escribe como $Q(\lambda x, \lambda y) = p(\lambda x + 2\lambda y, 2\lambda x + \lambda y)$ por ser p(x, y) homogéneo, digamos de grado n, se tiene

$$q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n p(x + 2y, 2x + y) = \lambda^n q(x, y)$$

II) Definimos h(x, y) = p(x, y) + q(x, y) entonces

$$h(\lambda x, \lambda y) = p(\lambda x, \lambda y) + q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n p(x, y) + \lambda^n q(x, y)$$

$$= \lambda^n[p(x, y) + q(x, y)]$$

$$= \lambda^n h(x\ y)$$

entonces $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n h(x, y)$

II) es verdadero

III) Si q(x, y) es homogéneo de grado 3 entonces $q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 q(x, y)\ \forall x, y,\ \forall \lambda \neq 0$, si $x = 1$, $y = 2$, $\lambda = -2$

$$q(-2, -4) = (-2)^3\, q(1, 2) = -8(5) = -40$$

entonces: q(-2, -4) = -40 así III) resulta verdadero

2. Polinomio completo: Un polinomio completo con respecto a una o varias de sus variables, es aquel que contiene todas las potencias sucesivas de las variables que se consideran (con coeficientes no nulos), desde la potencia más alta con que aparece la (las) variable (s) en el polinomio hasta la potencia cero inclusive.

EJEMPLO 4

a) $p(x) = 5x^2 - 3x^3 + 2 - x + 7x^4$ es completo (obviamente respecto de x)

b) $p(x, y) = 5x^3y^6 + y^7 + xy + x^2y^2 + 2$ es completo respecto a x

c) $p(x, y) = 3x^3y^4 + 2xy^2 + \sqrt{5}\,x^2y^3 + 2y + 3$

2. Polinomio ordenado: Son aquellos en donde los exponentes de la variable (o las variables) respecto a la cual se ordena van aumentando o disminuyendo a partir del primer término (contando de izquierda a derecha)

EJEMPLO 5

a) $p(x) = 4x - 5x^2 + 6x^5 + 3x^{10}$ está ordenado ascendentemente respecto a x.

b) $p(x) = 2x^6 - x^2 + x + 1$ está ordenado descendentemente respecto a x.

c) $p(x, y) = 5x^2y^5 + 3x^4y^3 + 3x^7y^2$ está ordenado ascendentemente respecto a x y descendentemente respecto a y.

Observación:

Un polinomio completo no tiene porque ser ordenado y viceversa, como nos muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6

a) el polinomio $p(x, y) = 3x^3y + xy^2 + x^2y^5 + 5$ es completo respecto a la variable x, pero no está ordenado respecto a la variable x, pero no está ordenado respecto a esta variable.

b) El polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ es completo respecto a la variable x y ordenado descendentemente respecto de esta variable.

3. Polinomio idéntico (iguales): Los polinomios p y q son idénticos (iguales), se denota por $p \equiv q$ si y sólo si $p(x, y, z, \ldots, w) = q(x, y, z, \ldots, w)$, $\forall x, y, z, \ldots, w \in k$.

EJEMPLO 7

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ un polinomio de grado n definamos un operador sobre los polinomios mediante

$$D[a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n] = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + n\,a_nx^{n-1}$$

determinar el polinomio p(x) tal que $D[p(x)] = 3x^2 + 2x^3$ y $p(0) = 3$.

Solución:

$$D(p(x)) = 3x^2 + 2x^3, \text{ de aquí } n - 1 = 3 \text{ entonces } n = 4$$

$$D(a_0 + a_1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$$

Luego los polinomios $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$ y $3x^2 + 2x^3$ son iguales, esto es debido a la condición $D[p(x)] = 3x^2 + 2x^3$

entonces: $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + a\,4a_4x^3 \equiv 3x^2 + 2x^3, \ \forall x \in R$

$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad 3a_3 = 3, \quad a_3 = 1$

$4a_4 = 2, \quad a_4 = 1/2$

$$p(x) = a_0 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 \text{ como } p(0) = 3 \text{ entonces } a_0 = 3$$

luego $$p(x) = 3 + x^3 + \frac{1}{2}x^4$$

Término independiente:

En todo polinomio, el término independiente, es decir, aquel que no contiene las variables es el valor numérico que toma el polinomio cuando todas sus variables toman el valor cero.

EJEMPLO 8

En el polinomio $p(x) = 2x^5 + x^3 + x - 2$.

-2 es el término independiente y se cumple $p(0) = -2$.

EJEMPLO 9

En el polinomio $p(x, y) = 3x^4y - xy^3 + 3$

3 es el término independiente y se cumple $p(0, 0) = 3$.

Suma de coeficientes: En todo polinomio, la suma de sus coeficientes se obtiene al hacer las variables del polinomio iguales a 1.

EJEMPLO 10

En el polinomio del ejemplo 12,

$$p(x) = 2x^5 + x^3 + x - 2$$

suma de coeficientes $= 2 + 1 + 1 - 2 = 2 = p(1)$

EJEMPLO 11

En el polinomio del ejemplo 13

$$p(x, y) = 3x^4y - xy^3 + 3$$

suma de coeficientes $= 3 - 1 + 3 = 5 = p(1, 2)$.

6.3 OPERACIONES CON POLINOMIOS

1) Suma y resta de polinomios:

Los polinomios se suman y restan agrupando sus términos semejantes.

EJEMPLO 1

Encontrar:

a) $(4x^3 - 2x^2 + 5x + 2) + (2x^4 - 3x^3 + x^2 + x)$

b) $(5x^2y - xy + xy^2) - (3x^2y + xy - 5xy^2)$

Solución:

a) $(4x^3 - 2x^2 + 5x + 2) + (2x^4 - 3x^3 + x^2 + x)$

$$= 5x^2 - xy + xy^2 - \underbrace{3x^2y - xy + 5xy^2}_{\text{Se cambia el signo de cada término del segundo polinomio}}$$

$$= \underbrace{(5x^2y - 3x^2y) + (-xy - xy) + (xy^2 + 5xy^2)}_{\text{agrupamos términos semejantes}}$$

$$= 2x^2y - 2xy + bxy^2$$

2) Multiplicación de polinomios

Determinamos el producto de dos polinomios (llamado factores) utilizando varias veces la propiedad distributiva y la ley de los exponentes.

EJEMPLO 2

a) Encontrar el producto $(3x+4)(2x^2-x+1)$

b) Encontrar el producto $(x^2y-xy)(x^2-xy+y^2)$

Solución:

a) $(3x+4)(2x^2-x+1) = 3x(2x^2-x+1)+4(2x^2-x+1)$ (propiedad distributiva)

$= 3x(2x^2)+3x(-x)+3x(4)+4(2x^2)+4(-x)+4$

(propiedad distributiva)

$= 6x^3-3x^2+12x+8x^2-4x+4$ (ley de los exponentes)

b) $(x^2y-xy)(x^2-xy+y^2) = x^2y(x^2-xy+y^2)-xy(x^2-xy+y^2)$ (Prop. distributiva)

$= x^2y(x^2)-x^2y(xy)+x^2y(y^2)-xy(x^2)-xy(-xy)-xy(y^2)$

(Prop. Distributiva)

$= x^4y-x^3y^2+x^2y^3-x^3y+x^2y^2-xy^3$ (ley de exponentes)

Se verifica que el $gr(P(x)\,Q(x)) = grP(x)+grQ(x)$, y el $gr(P(x))^n = ngr(P(x))$

3) División de Polinomios

Cuando dividimos un polinomio (el dividendo) entre otro (el divisor) obtenemos un polinomio cociente y un residuo, el residuo es el polinomio cero o un polinomio cuyo grado es menor que el grado del polinomio divisor.

P	D
R	Q

$P = DQ + R$

(Dividendo) = (divisor)(cociente) + residuo

Esta rutina de verificación es la base para un teorema conocido como **algoritmos de la división para polinomios**, que ahora presentamos sin prueba.

TEOREMA 1 **(Algoritmo de la división)**

Si $P(x)$ es un polinomio de grado m, y $D(x)$ es un polinomio no nulo, de grado m, entonces existen dos únicos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tal que

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

Donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $D(x)$ o $R(x)$ es el polinomio idénticamente nulo y donde el grado de $Q(x)$ = grado de $P(x)$ – grado de $D(x)$.

Nota: Si el grado de $D(x)$ es mayor que el grado de $P(x)$ es decir, $m > n$, en este caso

$$Q(x) \equiv 0 \quad y \quad R(x) = P(x)$$

Métodos de división de polinomios:

Método de polinomios

Se debe tener en cuenta, antes de empezar la división lo siguiente:

i) Ordenar los polinomios dividendo, divisor en forma descendente.

ii) Completar los polinomios dividendo y divisor.

Los métodos que consideraremos son los siguientes:

El método clásico

Luego de seguir los pasos uno y dos el procedimiento es:

1° Efectuamos la división del primer término del dividendo y el primero del divisor, obteniendo el primer término del cociente.

2° Multiplicar el primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor. Estos resultados con los signos cambiado se van colocando debajo de los términos semejantes del dividendo, para luego efectuar su reducción y obtener el primer resto parcial.

3° Bajamos el siguiente término del dividendo al nivel del primer resto parcial y dividimos el primer término de éste entre el primero del divisor. Con ello obtenemos el segundo término del cociente. Procedemos en forma análoga al paso 2° para obtener el segundo resto parcial.

4° Continuamos en forma similar a los pasos 2° y 3° hasta llegar al último término del dividendo y obtener un resto cuyo grado sea a lo más un grado menos que el divisor (resto máximo). Si la división es exacta el resto será un polinomio idénticamente nulo.

EJEMPLO 3

Dividir $-12x^2 + 6 + 4x^3$ entre $-3 + 2x^2$

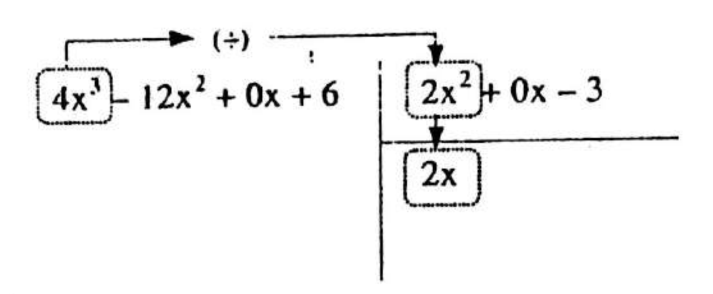
Solución:

Ordenando y completando los polinomios dividendo y divisor, respectivamente y teniendo en cuenta cada paso del procedimiento; se tiene,

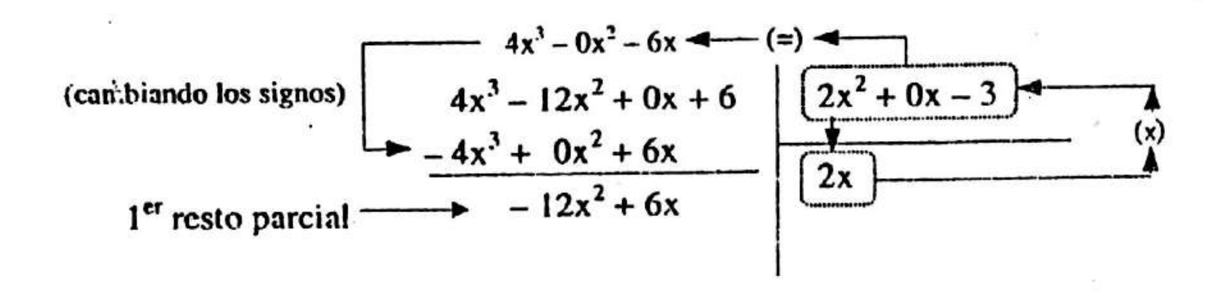
Polinomio dividendo (D). $-12x^2 + 6 + 4x^3 = 4x^3 - 12x^2 + 0x + 6$

Polinomio divisor (d). $-3 + 2x^2 = 2x^2 + 0x - 3$

Del paso 1,



Del paso 2,



Del paso 3,

(÷)

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 12x^2 + 0x + 6 & 2x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 + 0x^2 + 6x & 2x - 6 \\ \cline{1-1} -12x^2 + 6x + 6 & \end{array}$$

Finalmente,

$(-12x^2 + 0x + 18) \leftarrow (=)$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 12x^2 + 0x + 6 & 2x^2 + 0x - 3 \quad (x) \\ \cline{2-2} -4x^3 + 0x^2 + 6x & 2x - 6 \\ \cline{1-1} -12x^2 + 6x + 6 & \\ 12x^2 + 0x - 18 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

(Resto final) $\longrightarrow$ $6x - 12$

Luego, $Q(x) = 2x - 6$

$R(x) = 6x - 12$

Método de los coeficientes separados

Este es una variante del método anterior; pues el procedimiento es prácticamente el mismo. En él solo se toman en cuenta los coeficientes con un signo del polinomio dividendo y divisor.

EJEMPLO 4

Dividir $3x^2 + +2x - 8$ entre $x + 2$

Solución:

Tomando en cuenta solo los coeficientes y efectuando la división

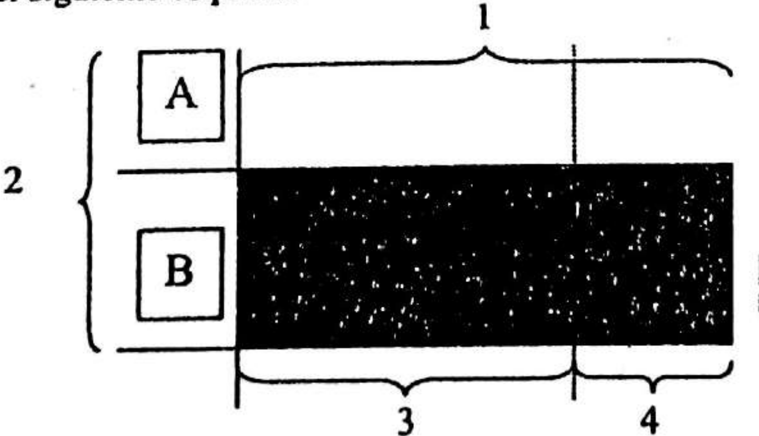
$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & +2 & -8 & & 1 \; + 2 \\ \hline -3 & -6 & & & 3 \; - 4 \\ \hline & -4 & -8 & & \\ & 4 & +8 & & \\ \hline & - & - & & \end{array}$$

Luego, $Q(x) = 3x - 4$

$R(x) = 0$

Método de Horner

Es un caso particular del método de coeficientes separados en el cual los cálculos se disponen en el siguiente esquema



Empezamos describiendo para que sirve cada una de las zonas del diagrama

- En la zona (1) se colocan de izquierda a derecha y con su propio signo, los coeficientes del polinomio dividendo.
- En la zona (2) se colocan, de arriba hacia abajo, los coeficientes del polinomio divisor. Esta zona está dividida en dos partes. En la parte (A) se ubica el primer coeficiente con su propio signo y en la parte (B) irán los coeficientes restantes con el signo cambiado.

- La zona (3) es una zona de resultados y está destinada para los coeficientes del polinomio cociente.
- La zona (4) también es una zona de resultados y está destinada para los coeficientes del polinomio residuo o resto.
- La zona (5) (la que está sombreada) es el área de trabajo en el que se forman filas y columnas. Las columnas están encabezadas por los coeficientes del polinomio dividendo y se enumeran de izquierda a derecha: 1ra, 2da, 3ra, 4ta, etc.
- Finalmente, la línea vertical discontinua se ubica a la izquierda del coeficiente del polinomio dividendo cuya posición, de derecha a izquierda, es igual al grado del polinomio divisor.

Pasos del método

Paso 1: Dividimos el primer coeficiente del polinomio dividiendo entre el primero del polinomio divisor, obteniendo el primer coeficiente del polinomio cociente.

Paso 2: Multiplicamos este (1er) coeficiente del polinomio cociente por los coeficientes del polinomio divisor que aparecen en (B), ubicando los resultados en la (1^{era}) fila y a partir de la (2da) columna.

Paso 3: Reducimos la (2da) columna, colocando el resultado en la parte superior de ésta para luego dividirlo entre el primer coeficiente del polinomio divisor y obtener el (2do) coeficiente del polinomio cociente.

Paso 4: Repetimos las veces necesarias los pasos 2° y 3° hasta obtener un valor debajo del último coeficiente del polinomio dividendo.

Paso 5: Finalmente, se reducen, de arriba hacia abajo, las columnas que aparecen a la derecha de la línea de trazos, ubicando los resultados en la zona (4) para obtener los coeficientes del polinomio resto.

EJEMPLO 5

Dividir $3x^5 + 5x^2 - 12x + 10$ entre $2x + x^2 + 2$

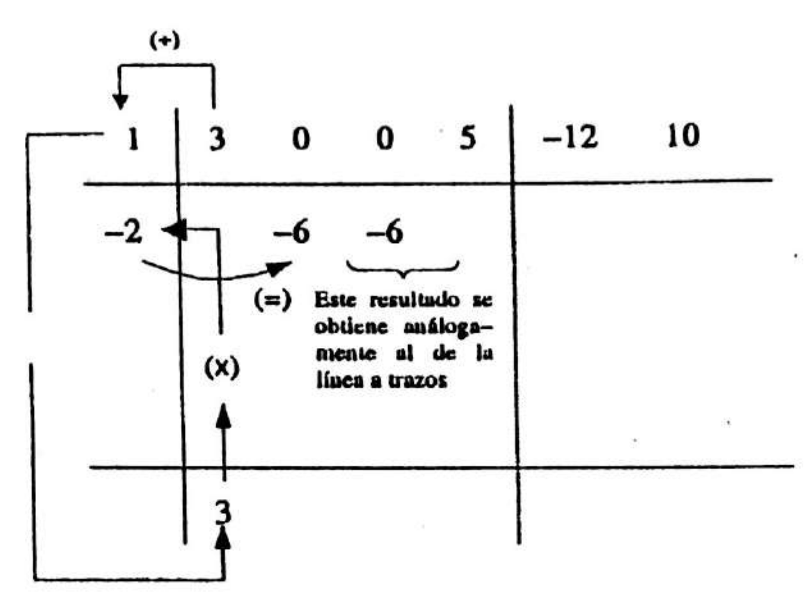
Solución:

Ordenando y completando los polinomios:

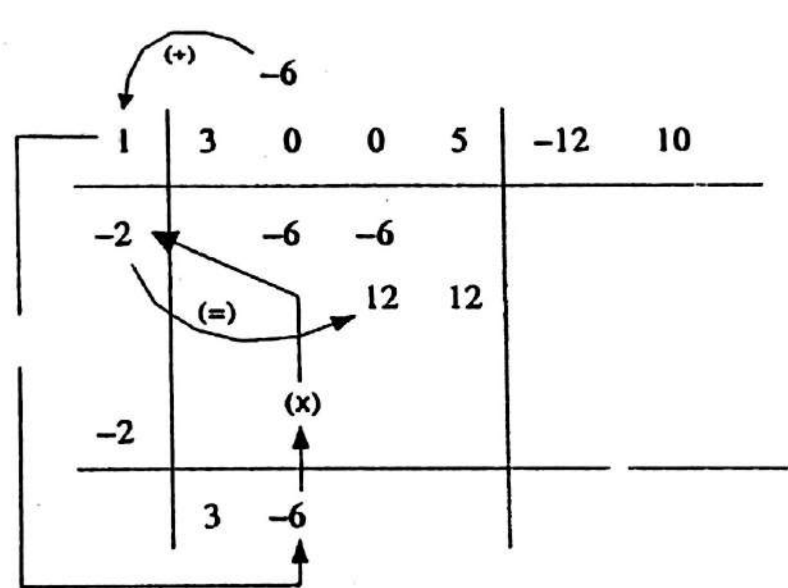
Polinomio dividendo (D): $3x^5 + 5x^2 - 12x + 10 = 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 5x^2 - 12x + 10$

Polinomio divisor (d): $2x + x^2 + 2 = x^2 + 2x + 2$

Pasos 1° y 2°.



Paso 3°.



Pasos 4° y 5°

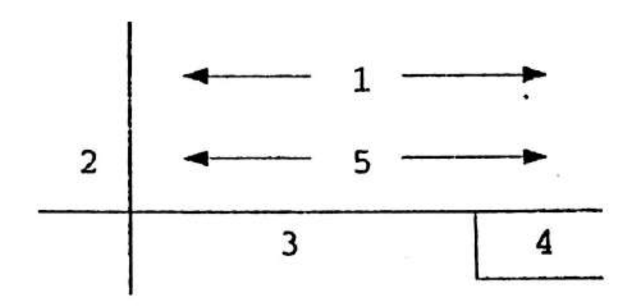
		–6	6	5		
1	3	0	0	5	–12	10
–2		–24	–6			
			12	12		
				–12	–12	
–2					–10	–10
	3	–6	6	5	–34	0

Finalmente, $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

$R(x) = -34x$

Método de Ruffini

Es un caso particular del método de Horner, se emplea para dividir polinomios de una variable entre un divisor binomio de primer grado de las formas ($x \pm b$; $ax \pm b$) o transformable a una de éstas. El esquema empleado para realizar la división es el siguiente:



Descripción:

- Las zonas 1, 3 y 4 cumplen las mismas función al del esquema Horner.
- En la zona 2, va el valor que se obtiene de igualar a cero el polinomio divisor.
- La zona 5 es de trabajo.

Pasos del método

Como el divisor es un binomio, entonces, sólo se completa y ordena el polinomio dividendo antes de aplicar el método cuyo proceso de cálculo es el siguiente:

Paso 1: Bajamos verticalmente el primer coeficiente del polinomio dividendo a la zona 3, luego lo multiplicamos por el número que está en 2 y éste resultado lo colocamos en la (2da) Columna.

Paso 2: Reducimos de arriba hacia abajo la (2da) columna, colocando el resultado en la zona 3, para multiplicarla luego por el número de la zona 2, colocando el resultado en la (3ra) columna.

Paso 3: Repetimos las veces necesarias el proceso del paso 2°, hasta obtener un valor debajo del último coeficiente del polinomio dividendo.

Paso 4: Reducimos la última columna para obtener el valor del resto o residuo.

Paso 5: Finalmente, dividimos los coeficientes del polinomio cociente, obtenido en los pasos anteriores, entre el coeficiente del polinomio divisor.

EJEMPLO 6

Dividir $\quad 20x^3 - 17x - 5x^2$ entre $4x - 5$

Solución:

Ordenando y completando el polinomio dividendo.

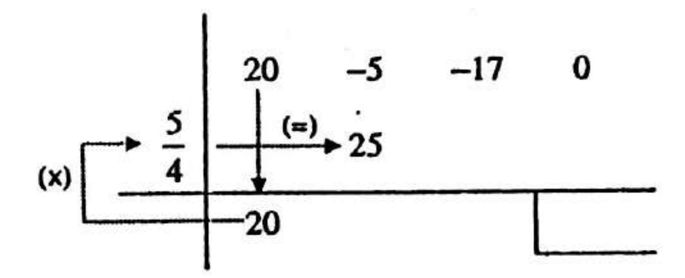
$D(x) = 20x^3 - 17x - 5x^2 = 20x^3 - 5x^2 - 17x + 0$

Igualando el binomio divisor a cero y despejando el valor de la variable que irá en la zona 2.

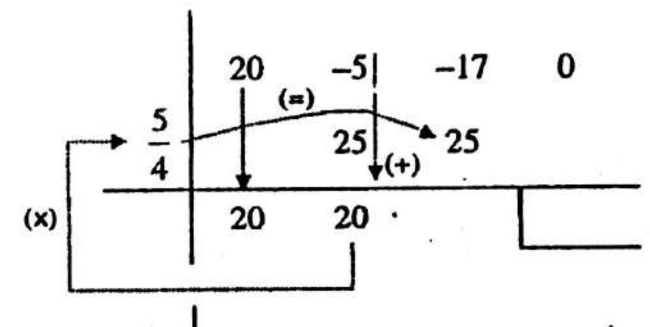
$$4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

efectuando la división.

Paso 1°,



Paso 2°,



Paso 3° y 4°,

	20	−5	−17	0
$\frac{5}{4}$		25	25	10 (+)
	20	20	8	10

Paso 5°,

	20	−5	−17	0
$\frac{5}{4}$		25	25	10 (+)
	20	20	8	10
(÷) 4				
	5	5	2	

Finalmente, $\quad Q(x) = 5x^2 + 5x + 2$

$\quad R(x) = 10$

6.4 PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

Productos notables: Son productos que aparecen con frecuencia en álgebra y cuyos desarrollos son conocidos. Los más importantes son:

1) Diferencia de cuadrados: $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$

2) Cuadrados perfectos: $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

3) Trinomios diversos: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

4) Cubos perfectos: $(x+a)^3 = x^3 + 3a^2x + 3ax^2 + a^3$

$(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

5) Diferencia de cubos: $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

6) Suma de cubos: $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$

7) Identidades de Legendre: $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

8) Identidad de Lagrange: $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

9) Identidad de Gauss: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Veamos algunos ejemplos de aplicación.

EJEMPLO 1

Si $x^2 < 1$ simplificar:

$$E = x^4 + 1 - \{(x+1)^3(x-1)^3(x^2-1)^5(x^2+1)^8(x^4-1)^2\}^{1/10}$$

Solución:

En el paréntesis efectuamos las operaciones.

$$(x+1)^3(x-1)^3 = (x^2-1)^3$$

entonces:

$$(x+1)^3(x-1)^3(x^2-1)^5 = (x^2-1)^3(x^2-1)^5 = (x^2-1)^8$$

$$(x+1)^3(x-1)^3(x^2-1)^5(x^2+1)^8 = (x^2-1)^8(x^2+1)^8 = (x^4-1)^8$$

$$(x+1)^3(x-1)^3(x^2-1)^5(x^2+1)^8(x^4-1)^2 = (x^4-1)^8(x^4-1)^2 = (x^4-1)^8$$

Luego:

$$E = x^4 + 1 - \{(x^4-1)^{10}\}^{1/10} = x^4 + 1 - 1\,|x^4 - 1|, \text{ luego } x^2 < 1,\ x^4 < 1$$

Entonces:

$$E = x^4 + 1 + x^4 - 1 = 2x^4.$$

EJEMPLO 2

Si $x > 0$, $y > 0$ y $xy^{-1} + x^{-1}y = 3$. Halla el valor de $E = \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^3 + \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)^3$

Solución:

De la condición $xy^{-1} + x^{-1}y = 3$ obtenemos que $x^2 + y^2 = 3xy$, luego

$$E = \left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right)^3 + \left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)^3 = \left(\frac{3xy}{y^2}\right)^3 + \left(\frac{3xy}{x^2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3x}{y}\right)^3 + \left(\frac{3y}{x}\right)^3$$

entonces:

$$E = \frac{27x^3}{y^3} + \frac{27y^3}{x^3} = \frac{27x^6 + 27y^6}{y^3x^3} = \frac{27(x^6 + y^6)}{x^3y^3}$$

ahora

$$(x^2 + y^2)^3 = x^6 + y^6 + 3x^2y^2(x^2 + y^2)$$
$$= x^6 + y^6 + 3x^2y^2(3xy)$$

entonces

$$(3xy)^3 = x^6 + y^6 + 9x^3y^3$$
$$18x^3y^3 = x^6y^6$$
$$E = \frac{27(18x^3y^3)}{x^3y^3} = 486$$

Cocientes notables: Son divisiones de la forma

$$\frac{x^n - a^n}{x - a}, \quad \frac{x^n - a^n}{x + a}, \quad \frac{x^n + a^n}{x + a}, \quad n \in N,$$

donde la división es exacta (esto es, el resto es nulo) y el cociente puede ser escrito sin efectuar la división directamente. Sin embargo, para que esto sea cierto se debe verificar las siguientes condiciones:

a) El cociente $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ siempre es notable (es decir la división es exacta) para todo $n \in N$

a) El cociente $\dfrac{x^n - a^n}{x + a}$ es notable si y solo si n es par.

b) El cociente $\dfrac{x^n + a^n}{x + a}$ es notable si y solo si n es impar.

Observación: El cociente $\dfrac{x^n + a^n}{x - a}$, $n \in N$ nunca es notable, lo cual puede comprobarse efectuando la división.

Cálculo de los cocientes:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1}}_{n \text{ términos}}$$

$$\frac{x^n - a^n}{x + a} = \underbrace{x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1}}_{n \text{ términos}}$$

$$\frac{x^n + a^n}{x + a} = \underbrace{x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1}}_{n \text{ términos}}$$

EJEMPLO 3

Calcular: $\dfrac{x^{21} + 1}{x^3 + 1}$.

Solución:

$$\frac{x^{21} - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^3)^7 - 1}{(x^3) - 1} = (x^3)^6 + (x^3)^5 1 + (x^3)^4 1^2 + (x^3)^3 1^3 + (x^3)^2 1^4 + (x^3) 1^5 + 1^6$$

$$= x^{18} + x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1.$$

EJEMPLO 4

Encontrar la relación que deben cumplir m, n, p y q para que el cociente $\dfrac{x^m - a^n}{x^p - a^4}$ sea notable.

Solución:

Se tiene que $\dfrac{x^m - a^n}{x^p - a^q} = \dfrac{(x^p)^k - (a^q)^k}{(x^p) - (a^q)}$ y donde $pk = m \wedge qk = n$, entonces $\dfrac{m}{p} = \dfrac{n}{q}$.

Luego

$$\frac{x^m - a^n}{x^p - a^q} \text{ es notable si } \frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \text{número de términos.}$$

EJEMPLO 5

Si la expresión $\dfrac{x^{5n+3} - y^{5(n+6)}}{x^{n-1} - y^{n+2}}$ es un cociente notable, hallar su número de términos.

Solución:

Usando el ejemplo anterior, para que el cociente sea notable se debe cumplir que

$$\frac{5n+3}{n-1} = \frac{5(n+6)}{n+2} = \text{número de términos}$$

de la igualdad $\dfrac{5n+3}{n-1} = \dfrac{5(n+6)}{n+2}$ se obtiene $n = 3$ entonces el número de términos es igual a $\dfrac{5(3+6)}{3+2} = 9$.

Cálculo del término de lugar k, ($1 \le k \le n$)

Sabemos que el desarrollo del cociente $\dfrac{x^n - a^n}{x - a}$, $n \in N$ es

$$\frac{x^n - a^4}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots a^{n-1}$$

de aquí es fácil establecer que el término de lugar k $1 \le k \le n$, es dado por

$$t_k = x^{n-k}a^{k-1}$$

Para los cocientes $\dfrac{x^n - a^n}{x + a}$, $n \in N$, n par, $\dfrac{x^n + a^n}{x + a}$, $n \in N$, n impar cuyos desarrollos son:

$$\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots - a^{n-1}, \text{ n par.}$$

$$\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots + a^{n-1}, \text{ n impar.}$$

La fórmula que da el término de lugar k es dada por

$$t_k = (-1)^{k+1} x^{n-k} a^{k-1}$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación.

EJEMPLO 6

Hallar el cociente notable que contiene en su desarrollo los siguientes términos consecutivos

$$\ldots + x^{70}y^{12} - x^{63}y^{15} + \ldots$$

Solución:

Sea

$$t_k = x^{70}y^{12}$$

$$t_{k+1} = x^{63}y^{15}$$

Entonces

$$t_k = x^{70}y^{12} = (x^7)^{10}(y^3)^4$$

$$t_{k-1} = x^{70}y^{12} = (x^7)^{10}(y^3)^4$$

El cociente es de la función

$$\frac{(x^7)^n ? (y^3)^n}{(x^7) ? (y^3)}$$

donde debemos decidir sobre el signo que hay entre estos términos.

Sabemos que el término de lugar k es:

$$t_k = (-1)^{k-1} (x^7)^{n-k} (y^3)^{k-1}$$

luego

$$(-1)^{k-1} (x^7)^{n-k} (y^3)^{k-1} = x^{70} \text{ y } x^{12}$$

luego

$$3(k-1) = 12 \Rightarrow k = 5$$

$$7(n-k) = 70 \Rightarrow 7(n-5) = 70 \Rightarrow n = 15$$

entonces el cociente notable es:

$$\frac{(x^7)^{15} + (y^3)^{15}}{x^7 + y^3}$$

EJEMPLO 7

Si el cociente $\dfrac{2x - x^2}{1 - \sqrt[20]{x-1}}$ es notable, hallar el término de lugar 21, es decir t_{21}.

Solución:

Escribimos el cociente como $\dfrac{2x - x^2}{1 - \sqrt[20]{x-1}} = \dfrac{1 - (x^2 - 2x + 1)}{1 - \sqrt[20]{x-1}}$

$$= \frac{1 - \left[\sqrt[20]{x-1}\right]^{40}}{1 - \sqrt[20]{x-1}}$$

$$= \frac{1^{40} - \left[\sqrt[20]{x-1}\right]^{40}}{1 - \sqrt[20]{x-1}}$$

entonces

$$t_{21} = (1)^{40-21} \left[\sqrt[20]{x-1}\right]^{21-1}$$

$$= x - 1$$

6.5 FACTORIZACION Y DIVISIBILIDAD

Consideremos el producto

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

los dos polinomios de la izquierda en los **factores** del polinomio de la derecha, esto nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1

Al proceso de expresar un polinomio dado como un producto de otro polinomio, es decir, al determinar los factores de un polinomio es lo que llamaremos **factorización.**

La factorización puede ser:

- **Factorización sobre los enteros:** Cuando los coeficientes de los factores son números enteros.
- **Factorización sobre los racionales:** Cuando los coeficientes de los factores son números racionales.
- **Factorización sobre los reales:** Cuando los coeficientes de los factores son números reales.
- **Factorización sobre los complejos:** Cuando los coeficientes de los factores son números complejos.

EJEMPLO 1

a) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ está factorizado sobre los enteros.

b) $x^2 - ¼ = (x + 1/2)(x - 1/2)$ esta factorizando sobre los racionales.

c) $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ está factorizado sobre los reales.

d) $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, está factorizado sobre los complejos, aquí i es tal que $i^2 = -1$

DEFINICIÓN 2

Si un polinomio no puede ser escrito como el producto de otros dos polinomios (excluyendo a 1 y –1), entonces el polinomio es **primo.**

DEFINICIÓN 3

Si un polinomio está escrito como un producto que sólo tiene factores primos, se dice que está factorizando en forma completa.

EJEMPLO 2

$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ está factorizado en forma completa. Aquí sólo recordamos las técnicas de factorización llamadas, método del aspa simple y método del aspa doble.

Método del aspa simple: Se emplea (en principio) para factorizar trinomios de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

EJEMPLO 3

Factorizar: $15x^4 - 11x^2y + 2y^2$

Solución:

$$15x^4 - 11x^2y + 2y^2$$

$$\begin{array}{ll} 5x^2 & -2y \\ 3x^2 & -y \end{array}$$

$$5x^2(-y) + 3x^2(-2y) = -11x^2y$$

entonces la factorización es: $(5x^2 - 2y)(3x^2 - y)$

Método del aspa doble: Se emplea para factorizar expresiones de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f$$

$$\begin{array}{lll} a_1x & c_1y & f_1 \\ a_2x & c_2y & f_2 \end{array}$$

EJEMPLO 4

Factorizar: $15x^2 + 14xy + 3y^2 + 41x + 23y + 1y$

Solución:

$$15x^2 + 14xy + 3y^2 + 41x + 23y + 1y$$

$$\begin{array}{lll} 5x & 3y & 2 \\ 3x & y & 7 \end{array}$$

La factorización es $(5x + 3y + 2)(3x + y + 7)$

Divisibilidad: Dado dos polinomios no nulos P y D, se dice que el polinomio P es divisible por el polinomio D, si existe un polinomio Q tal que P = QD. En este caso es llamado un divisor de P.

Máximo común divisor (MCD): El MCD de dos o más polinomios, es el polinomio divisor de ellos de mayor grado absoluto posible.

Mínimo común múltiplo (MCM): El MCM de dos o más polinomios, es el polinomio de menor grado absoluto posible que acepta a estos polinomios como divisores.

EJEMPLO 5

Si el máximo común divisor de los polinomios

$$p(x) = 3x^3 + 2x - 5x^2 \quad y \quad q(x) = 3x^2 + 7x^3 - 7x - 3$$

es de la forma ax + b, hallar ab^2.

Solución:

Factorizando p(x) y q(x) obtenemos

$$p(x) = x(3x - 2)(x - 1)$$

$$q(x) = (7x + 3)(x + 1)(x - 1)$$

entonces el MCD es x – 1, de aquí a = 1, b = -1, $ab^2 = 1(-1)^2 = 1$.

6.6 RADICACIÓN: RACIONALIZACIÓN Y RAIZ CUADRADA DE POLINOMIOS.

Definimos la raíz n-esima principal de un número real a, denotada $\sqrt[n]{a}$, como sigue:

DEFINICIÓN 1

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$, donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si n es par y a, b son números reales arbitrarios si n es impar.

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ para la raíz n-ésima principal de a se le llama **radical**; el entero n es el **índice** y a es el radicando.

índice ← $\sqrt[n]{a}$ → radicando

Si el índice de un radical es 2, $\sqrt[2]{a}$ es la **raíz cuadrada** de a y el índice se omite, escribiendo solo $\sqrt{a}$.

En general, si $n \geq 2$ en un entero positivo y a b como número real tenemos que:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ si } n \text{ es impar}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ si n es par.}$$

Propiedades básicas de los radicales:

Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos y a, b número reales. Si todos los radicales están definidos tenemos las siguientes propiedades.

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 3) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ 4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Observación:

Simplificar un radical significa eliminar de éstos, cualquier raíz perfecta que aparezca como factor.

EJEMPLO 1

Simplificar: $\sqrt[3]{\dfrac{27x^5}{8y^2}}$

$$\sqrt[3]{\frac{27x^5}{8y^2}} = \sqrt[3]{\frac{3^3.x^3.x^2}{2^3y^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3x}{2}\right)^3\cdot\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3x}{2}\right)^3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{3x}{2}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}$$

Los radicales son usados para definir exponentes racionales de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 2

1) Si $a \in R$ y $n \geq 2$ es un entero, entonces $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, siempre y cuando $\sqrt[n]{a}$ exista.

2) Si $a \in R$ y m y n son enteros primos, $n \geq 2$ entonces

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

siempre y cuando $\sqrt[n]{a}$ exista.

Observación 2: Las leyes de los exponentes son válidas para exponentes racionales.

Racionalización

DEFINICIÓN 3

Racionalizar un cociente es rescribir este cociente de modo que el denominador no contenga radicales.

Aquí la idea principal para lograr lo que la definición 3 pide es determinar una expresión adecuada de modo que, al ser multiplicada por el radical en el denominador, el nuevo denominador no tenga radicales, ilustremos esto con algunos ejemplos.

EJEMPLO 2

Racionalizar $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Solución:

En este caso

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4^2}}=\frac{3\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4^3}}=\frac{3\sqrt[3]{16}}{4}$$

EJEMPLO 3

Racionalizar $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}\sqrt{5}\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{2-5}=-\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}\sqrt{5}\right)}{3}$$

EJEMPLO 4

Racionalizar $\dfrac{10}{2-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{18}}$

Solución:

$$\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}+2=\sqrt[3]{3^2.2}-\sqrt[3]{3.2^2}+\sqrt[3]{2^2.2}$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)$$

$$\frac{10}{2-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{18}}=\frac{10}{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}$$

$$\frac{10}{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{10\sqrt[3]{2^2}\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}$$

$$=\frac{10\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{2\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right)}$$

$$=\frac{10\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{2(3+2)}$$

$$=\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)$$

$$=\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{8}$$

$$=\sqrt[3]{12}+2$$

luego:

$$\frac{10}{2-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{18}}=\frac{\sqrt[3]{12}+2}{1}=\sqrt[3]{12}+2$$

Transformación de radicales dobles a simples:

DEFINICIÓN 4

La expresión $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ es llamado un radical doble.

EJEMPLO 5

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{5-\sqrt{7}}$ son ejemplos de radicales dobles.

En algunas ocasiones es necesario expresar un radical doble como la suma de dos radicales simples (es decir como $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$ el proceso mediante el cual esto es llevado a cabo se llama transformación de radicales dobles a simples.

Nos preguntamos cuando es posible descomponer un radical doble en la suma de dos radicales simples, el siguiente teorema establece la condición para que esto sea posible.

TEOREMA 1

Si $C=\sqrt{A^2-B}$ es un cuadrado perfecto entonces $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

EJEMPLO 6

Transformar a radicales simples $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Solución:

En este caso $C=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}=1$ entonces

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}-\sqrt{\frac{3-1}{2}}$$
$$=\sqrt{2}-1$$

Raíz cuadrada de un polinomio

Raíz cuadrada de un polinomio p(x) es un polinomio Q(x) tal que $Q^2(x) = P(x)$, se denota $Q(x) = \sqrt{P(x)}$, donde asumimos que $P(x) \geq 0, \forall x \in R$.

Presentamos el método para obtener la raíz cuadrada de un polinomio, directamente con un ejemplo.

EJEMPLO 7

Hallar la raíz cuadrada de $p(x) = 4x^6 - 12x^5 + 25x^4 - 44x^3 + 5x^2 - 3$.

Solución:

1) Ordenamos en forma descendente y completamos el polinomio p(x)

   $p(x) = 4x^6 - 12x^5 + 25x^4 - 44x^3 + 5x^2 + 0x - 3$.

2) Planteamos

$\sqrt{4x^6 - 12x^5 + 25x^4 - 44x^3 + 5x^2 + 0x - 3}$	$2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$
$-4x^6$	
$-12x^5 + 25x^4$	$(4x^3 - 3x^2)(-3x^2)$
$12x^5 - 9x^4$	
$16x^4 - 44x^3 + 5x^2$	$(4x^3 - 6x^2 + 4x)(4x)$
$-16x^4 + 24x^3 - 16x^2$	
$-20x^3 - 11x^2 \quad 0 \quad -3$	
$20x^3 - 30x^2 + 40x - 25$	$(4x^3 - 6x^2 + 8x - 5)(-5)$
$-41x^2 + 40x - 28$	

Explicación:

a) Extraemos la raíz cuadrada al primer término $\sqrt{4x^6} = 2x^3$.

b) Dividimos los dos términos siguientes y duplicamos la raíz hallada.

c) Dividimos el primer término de los bajados, entre el duplo de la raíz (es decir $-12x^5$ entre $4x^3$).

d) Escribimos este resultado 3 veces, una vez en la raíz y dos veces al lado del duplo de la raíz.

Es decir

a) Multiplicamos y colocamos con signo cambiado dentro de la raíz, simplificamos y bajamos los dos siguientes términos.

b) Repetimos el proceso hasta que se obtenga un polinomio nulo o un polinomio de grado menor que el de la raíz encontrada hasta ese momento.

6.7 FUNCION POLINOMIAL DE UNA VARIABLE REAL

En esta sección presentamos los aspectos más importantes relacionados con las funciones polinomiales de una variable real, empezamos definiendo que debemos entender por una función polinomial de una variable real.

DEFINICIÓN 1

Una función polinomial es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales y n es un entero no negativo. El dominio lo constituyen todos los números reales.

De acuerdo a esta definición, una función polinomial es aquella función cuya regla de correspondencia está dada por un polinomio en una variable. El **grado** de una función polinomial es el grado del polinomio en una variable.

EJEMPLO 1

Determine, cuales de las funciones siguientes son polinomiales, indicando el grado de aquellas que lo sean.

a) $f(x) = x^4 + x^3 - 2.$

b) $g(x) = 8$

c) $h(x) = 0$

d) $F(x) = \sqrt{x} + 2$

e) $G(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$

Solución:

a) f es una función polinomial de grado 4.

b) g es una función constante diferente de cero, es una función polinomial de grado cero.

c) H es la función polinomial cero, no se le asigna grado alguno.

d) F no es función polinomial

e) G no es función polinomial, es mas bien el cociente de dos polinomios, el cual se le llama función racional.

Gráficos de polinomios:

Para hacer la gráfica con precisión de una función polinomial se requieren técnicas que van mas allá del objetivo de este curso. Aceptamos que la gráfica de toda función polinomial es suave y continua. Por suave queremos decir que la gráfica no tiene esquinas o cúspides y continua significa que la gráfica puede ser dibujada sin interrupciones.

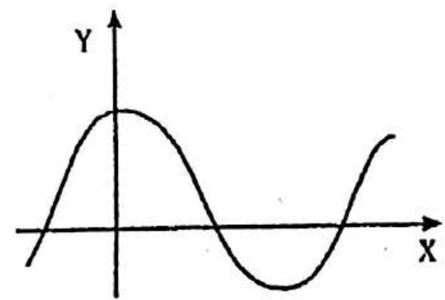


Figura 1
Gráfica de una función polinomial

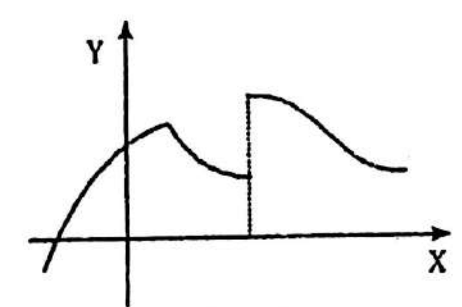
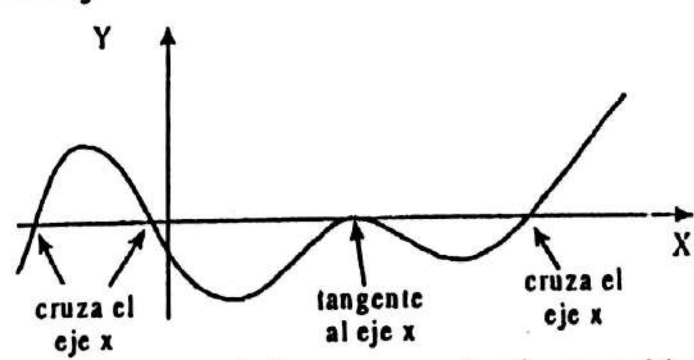


Figura 2
Gráfica de una función no polinomial

La figura 3 muestra la gráfica de una función polinomial con cuatro intersecciones con el eje x. Ahora obsérvese que en estas intersecciones con el eje x la gráfica debe cruzar o ser tangente al eje x y por lo tanto entre dos intersecciones consecutivas la gráfica se encuentra por arriba o por debajo del eje x.



Para localizar las intersecciones con el eje x se resuelve la ecuación f(x) = 0, por ejemplo si $f(x) = (x + 2)^2(x - 3)$ entonces las intersecciones con el eje x se obtienen de

$$f(x) = (x + 2)^2(x - 3) = 0$$

las cuales son –2 y 3, esto nos lleva a definir el concepto de raíz de un polinomio.

DEFINICIÓN 2

Sea f una función polinomial de grado mayor o igual a 1, un número real para el cual $f(r) = 0$ es llamado una raíz (real) o un cero (real) de f.

Por lo tanto, las raíces reales de una función polinomial son las intersecciones de su gráfica con el eje x.

Además si $x - r$ es un factor de f, es decir $f(x) = (x - r)Q(x)$ entonces $f(r) = 0$ y luego r es una raíz de f. Si el factor $x - r$ aparece mas de una vez entonces r es llamado una raíz múltiple de f, para más precisión damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3

Una raíz r de una función polinomial f se dice que es de multiplicidad m si

$$f(x) = (x - r)^m\, g(x), \text{ donde } g(r) \neq 0.$$

Según sea m = 1, 2, 3, . . . se acostumbra llamar raíz simple, doble, triple, en general raíz de orden m veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

Sea $f(x) = (x - 1)^2(x - 3)^3(x - 5)$

Solución:

1) $x = 1$ es una raíz doble de f.
2) $x = 3$ es una raíz triple de f
3) $x = 5$ es una raíz simple de f

Ahora graficaremos una función polinomial usando sus raíces reales.

EJEMPLO 3

Para la función polinomial $f(x) = x^2(x - 3)$.

a) Hallar sus raíces reales (intersecciones con el eje x).
b) Hallar sus intersecciones con el eje y.
c) Utilizando (a) determine los intervalos donde la gráfica de f está por arriba o por abajo del eje x.
d) Trazar la gráfica de f.

Solución:

a) Las raíces reales de (intersección con el eje x) se hallan resolviendo en R, $f(x) = 0$

$$x^2(x-3) = 0$$

Luego $x = 0$ es una raíz doble de f.

$x = 3$ es una raíz simple de f.

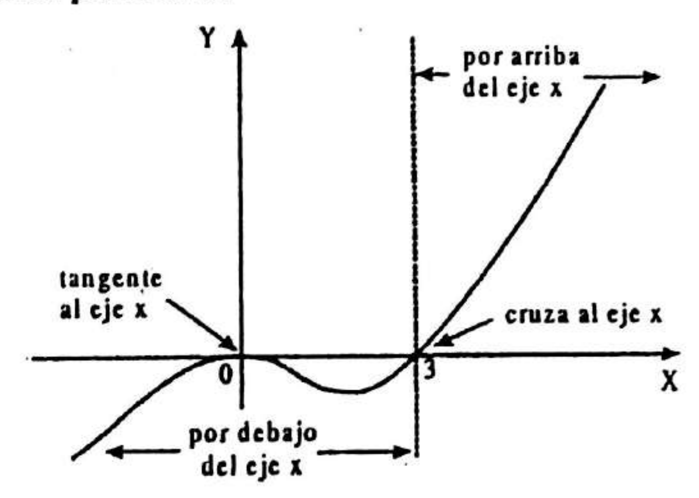
b) La intersección con el eje y es $f(0) = 0^2(0-3) = 0$ $f(0) = 0$.

c) Las raíces reales de f divide el eje x en los intervalos $-\infty < x < 0$, $0 < x < 3$, $x > 3$, para determinar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje x resolvemos $f(x) > 0$ [o por debajo del eje x, $f(x) < 0$].

Luego $f(x) = x^2(x-3) > 0 \leftrightarrow x > 3$

$f(x) = x^2(x-3) < 0 \leftrightarrow 0 < x < 3 \vee -\infty < x < 0$

d) Graficamos la función polinomial



Obsérvese del ejemplo anterior que la gráfica de f cruza al eje x en $x = 3$, la cual es una raíz simple de f y es tangente al eje x en $x = 0$ la cual es una raíz doble de f. Esto sugiere el siguiente resultado:

1) Si $x = r$ es una raíz real de multiplicidad par, la gráfica es tangente al eje x en r, el signo de f no cambia de un lado al otro de r.

2) Si $x = r$ es una raíz real de multiplicidad impar, la gráfica cruza al eje x, el signo de f cambia de un lado al otro de r.

En resumen para graficar una función polinomial

1) Se factoriza completamente en R.

2) Se determinan los ceros reales de f.
   - En una raíz real de multiplicidad par: la gráfica de f es tangente al eje x
   - En una raíz real de multiplicidad impar: la gráfica de f cruza al eje x.

3) Entre raíces reales consecutivas, determine si la gráfica de f está por arriba o por debajo del eje x.

4) Teniendo en cuenta 2) y 3) trace la gráfica de f

Veamos a continuación un corolario del algoritmo de la división el cual es llamado frecuentemente teorema del residuo.

TEOREMA 2 **(Teorema del residuo)**

Sea f una función polinomial de grado mayor o igual a 1, entonces el residuo de la división de f entre $x - a$ es igual al valor numérico de la función polinomial en $x = a$. Es decir:

$$\text{Residuo } R = f(a)$$

Prueba: En efecto, por el algoritmo de la división de polinomios se cumple:

$$f(x) = (x - a)\,Q(x) + R, \quad R \text{ constante}$$

y si en esta relación reemplazamos $x = a$ en ambos miembros, entonces

$$f(a) = (a - a)Q(a) + R$$

es decir $$f(a) = R.$$

EJEMPLO 4

Hallar el residuo de la división de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ entre $x + 1$.

Solución:

Por el teorema del residuo

$$R = f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(1) + 1 = 5$$

$$R = 5.$$

Una consecuencia del teorema del residuo es el teorema del factor.

TEOREMA 2 **(Teorema del factor)**

Sea f una función polinomial de grado mayor o igual a 1, entonces $x - r$ es un facto de $f(x)$ si y sólo si $f(r) = 0$, nótese que el teorema del factor consta de dos enunciados separados:

1) Si $f(r) = 0 \Rightarrow x - r$ es un factor de $f(x)$

2) Si $x - r$ es un factor de $f(x) \Rightarrow f(r) = 0$.

Un empleo del teorema del factor es para determinar si un polinomio tiene un factor en particular.

EJEMPLO 5

¿Es $x + 1$ un factor de $f(x) = x^3 + x + 2$?

Solución:

Como $x + 1 = x - (-1)$, $r = -1$, hallamos $f(-1) = (-1)^3 - 1 + 2 = 0$ entonces por el teorema del factor $x + 1$ es un factor de $f(x)$.

EJEMPLO 6

¿Es $x + 2$ un factor de $f(x) = x^3 + x - 3$?

Como $x + 2 = x - (-2)$, $r = -2$, hallamos $f(-2) = (-2)^3 + (-2) - 3 = -13 \neq 0$ entonces por el teorema del factor $x + 2$ no es un factor de $f(x) = x^3 + x - 3$.

Número de raíces de una función polinomial

Las raíces de una función polinomial son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Las raíces de una función polinomial pueden ser reales o complejas. Las raíces reales de f son las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$, geométricamente son las intersecciones de la gráfica de f con el eje x, las raíces complejas no tienen una interpretación geométrica tan directa. Sin embargo, en la mayoría de los casos, las raíces de una función polinomial son difíciles de encontrar no existen fórmulas sencillas disponibles como en el caso de la ecuación cuadrática. Aún cuando existen fórmulas para hallar las raíces para funciones polinomiales de grados 3 y 4 estas son complicadas y difíciles de usar, además se ha demostrado que no existen fórmulas generales para hallar las raíces de funciones polinomiales de grado 5 o mayor.

El primer teorema que presentamos está referido al número de raíces reales que una función polinomial puede tener. Al contar las raíces de una función polinomial, contamos cada raíz tantas veces como sea su multiplicidad.

TEOREMA 3

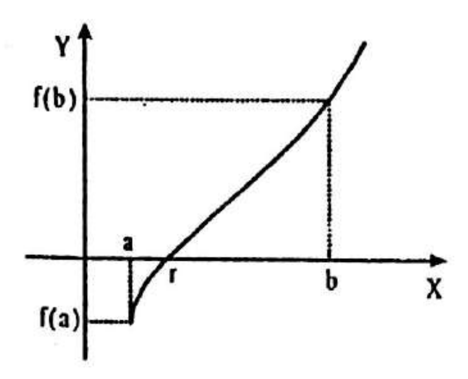
Toda función polinomial de grado n tiene a lo más n raíces reales.

El siguiente teorema es usado para localizar las raíces reales de una función polinomial.

TEOREMA 4

Sea f una función polinomial, si $a < b$ y si f(a) y f(b) son de signos opuestos, entonces hay al menos una raíz real de f entre a y b.

Gráficamente



EJEMPLO 7

Demuestre que $f(x) = x^3 + x - 1$ tiene exactamente una raíz real en el intervalo [0,1]

Solución:

Como $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$, los cuales son de signos opuestos, entonces por el teorema anterior, f tiene al menos una raíz real en $\langle 0, 1\rangle$. La unicidad de esta raíz real es consecuencia del hecho de que f es estrictamente creciente en [0, 1].

En general no es posible garantizar cuando una función polinomial tiene una raíz real, por ejemplo $f(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces reales. El siguiente teorema establece una condición suficiente para que una función polinomial tenga una raíz real.

TEOREMA 5

Toda función polinomial (con coeficientes reales) de grado impar tiene al menos una raíz real.

EJEMPLO 8

Demostrar que $f(x) = x^5 + x^2 - 1$ tiene al menos una raíz real en el intervalo [0,1].

Solución:

Al ser f una función polinomial de grado 5 por el teorema anterior, tiene al menos una raíz real, y como $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ se deduce del teorema del valor intermedio que una raíz real está en el intervalo $\langle 0,1\rangle$.

TEOREMA 6

Sean a y b dos números racionales tales que $\sqrt{b}$ es irracional, y sea f una función polinomial con coeficientes racionales. Si $a + \sqrt{b}$ es una raíz de f entonces $a - \sqrt{b}$ también es raíz de f.

EJEMPLO 9

Hallar una función polinomial de menor grado con coeficientes racionales y que tenga como raíces a 2 y $2 + \sqrt{3}$.

Solución:

Si $a + \sqrt{3}$ es una raíz entonces por el teorema anterior $2 - \sqrt{3}$ también debe de serlo y por lo tanto puede escribirse como

$$f(x) = (x - 2)(x - (2 + \sqrt{3})(x - (2 + \sqrt{3}))$$

efectuando operaciones

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

es la función polinomial buscada.

Raíces racionales de un polinomio

TEOREMA 7 **(De las raíces racionales)**

Sea f una función polinomial de grado mayor o igual a 1 de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ con cada coeficiente entero. Si $\frac{p}{q}$, sin factores comunes, es una raíz racional de f entonces

p es un divisor del término independiente a_0

f es un divisor del coeficiente principal a_n

Este teorema nos dice que las posibles raíces reales de f solo pueden hallarse entre aquellos números racionales de la forma $\frac{p}{q}$ donde p es divisor de a_0 y q es divisor de a_n.

Corolario 1: Si la función polinomial del teorema de las raíces racionales, tiene coeficiente principal a_n igual a 1, entonces toda raíz racional es un número entero y es divisor del término independiente a_0.

EJEMPLO 10

Determinar las raíces racionales, si existen, de $2x^3 + \frac{29}{3}x^2 - \frac{40}{3}x + 4$.

Solución:

Para aplicar el teorema de las raíces racionales, los coeficientes deben ser enteros, así es que,

$$f(x) = \frac{1}{3}(6x^3 + 29x^2 - 40x + 12)$$

y es suficiente trabajar con $6x^3 + 29x^2 - 40x + 12$, sus posibles raíces racionales serán de la forma

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{divisor de } a_0}{\text{divisor de } a_3} = \frac{\text{divisor de } 12}{\text{divisor de } 6} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{1, 2, 3, 6}$$

es decir $\frac{p}{q}$ solo podrá tomar tres de los siguientes valores posibles.

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{4}{3}$$

al probar cada uno de ellos mediante la división sintética vemos que las únicas que producen el residuo R = 0 son –6, 1/2, 2/3, en efecto,

	6	29	-40	12
1/2		3	16	-12
	6	32	-24	0
-6		-36	24	
	6	-4	0	
2/3		4		
	6	0		

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{1}{3}(6)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 6)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

es decir

$$f(x) = 2\left(x - \frac{2}{3}\right)(x+6)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Relación entre las raíces y los coeficientes

Presentamos un teorema que establece la relación entre las raíces y los coeficientes de una función polinomial.

TEOREMA 8

Sea la función polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1 x + a_0$$

y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sus raíces, entonces

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
(suma de las raíces)

$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$
(suma de los dobles productos de las raíces)

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-3}}{a_n}$
(suma de los triples productos de las raíces)

....

$x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$
(Productos de las raíces)

La prueba de este teorema consiste en desarrollar la expresión

$$p(x) \doteq a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

y comparar los coeficientes.

6.8 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1

El polinomio $p(x) = (9x^8 - 7)^m(2x^2 + 3x^3 - 1)^{m-2}(x^9 + 3)$ tiene como grado absoluto 47, hallar el cociente

$$\frac{\text{Coeficiente principal de } p(x)}{\text{Término independiente de } p(x)}$$

Solución:

$$\text{Grado absoluto} = 47 = 8m + 3(m-2) + 9 \Rightarrow m = 4$$

entonces $$p(x) = (9x^8 - 7)^4(2x^2 + 3x^3 - 1)^2(x^9 + 3)$$

$$\text{Coeficiente principal de } p(x) = 9^4(3)^2(1)$$

$$\text{Término independiente de } p(x) = p(0) = (-7)^4(-1)^2(3) = 7^4(3)$$

Entonces

$$\frac{\text{Coeficiente principal de } p(x)}{\text{Término independiente de } p(x)} = \frac{3^9}{7^4}$$

PROBLEMA 2

Si el polinomio: $p(xy) = \frac{1}{2}(a+b)x^{a^2+n} + \frac{1}{3}(a-b)x^{b^2+n}y^n - y^{b^2} + 12$ es homogéneo, determinar el producto de sus coeficientes.

Solución:

Al ser p(xy) homogéneo se cumple

$$a^2 + n = b^2 + 2n = b^2 + 12$$

de $$b^2 + 2n = b^2 + 12 \Rightarrow n = 6$$

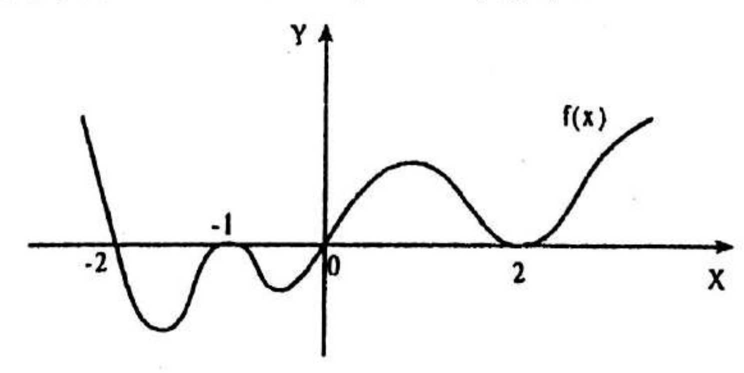
de $$a^2 + n = b^2 + 2n \Rightarrow a^2 - b^2 = n = 6$$

$$\text{producto de coeficientes} = \frac{1}{3}(a-b)(a+b)\frac{1}{2}(-1)$$

$$= \frac{1}{6}(a^2 - b^2) = -\frac{1}{6}(6) = -1$$

PROBLEMA 3

Si la función polinomial $f(x) = (x+2)^a(x+1)^b x^c (x-2)^d$, cuya gráfica se muestra, es de grado 8 y la suma de sus coeficientes es 108, hallar a, b, c, d.



Solución:

Como el grado de f(x) es 8 se tiene que $f(x) = (x+2)(x+1)^2 x^3(x-2)^2$ o $f(x) = (x+2)^3(x+1)^2 x(x-2)^2$ como la suma de los coeficientes es 108, se tendrá que

$$f(x) = (x+2)^3(x+1)^2 x(x-1)^2$$

entonces $a = 3, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 2.$

PROBLEMA 4

Hallar los valores reales de A y B para que la función $x^3 + 2x^2 + Ax + B = 0$ tenga una raíz doble y además admita a -4 como raíz simple.

Solución:

$$x^3 + 2x^2 + Ax + B = (x - a)^2(x + 4)$$
$$= x^3 + (4 - 2a)x^2 + (a^2 - 8a)x + 4a^2$$

entonces $2 = 4 - 2a \Rightarrow a = 1$

$$A = a^2 - 8a \Rightarrow A = -7$$
$$B = 4a^2 \quad \Rightarrow B = 4$$

PROBLEMA 5

La gráfica de un polinomio p(x) de quinto grado intersecta al eje x en los puntos $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$ y es tangente al eje x en $x = -2$ además $p(0) = 48$. Halle el resto de la división p(x) entre $x^2 + 2x - 3$.

Solución:

$p(x) = A(x + 2)^2(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

como $p(0) = 48 \Rightarrow A = 2$

$$p(x) = 2(x + 2)^2(x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

por el algoritmo de la división planteamos

$$2(x + 2)^2(x + 1)(x - 2)(x - 3) = (x + 3)(x + 1)Q(x) + \underbrace{ax + b}_{\text{resto}}$$

Evaluando ambos miembros en $x = -3$ y en $x = 1$ tenemos:

$$120 = -3a + b$$
$$72 = a + b$$

luego $a = 48$, $b = 24$

entonces el resto es $R(x) = 48x + 24$

PROBLEMA 6

Dada la siguiente función polinomial $p(x) = 1 + bx^3 - ax^5 - 2x^7$, donde a es entero positivo y b es entero negativo, dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) Una raíz de $p(x) = 0$ es 1/3.

II) Si $x_1 < x_2$ entonces $p(x_1) < p(x_2)$

III) $p(x) = 0$ tiene una sola raíz real

Solución:

I) Es falso si x = 1/3 f con raíz 1 debe ser divisor del término independiente el cual es 1 y 3 debe ser divisor del coeficiente principal el cual es −2 y esto último es falso.

II) Es falso, veamos porque, escribimos

$$p(x) = -(2x^7 + ax^5 - bx^3 - 1)$$

ahora:

$$x_1 < x_2 \rightarrow 2_1^7 < 2x_2^7$$
$$x_1 < x_2 \rightarrow a_1^5 < ax_2^5$$
$$x_1 < x_2 \rightarrow -bx_1^3 < -bx_2^3$$
$$2_1^7 + ax_1^5 - bx_1^3 < 2x_2^7 + ax_2^5 - bx_2^3$$

luego $$2_1^7 + ax_1^5 - bx_1^3 + 1 < 2x_2^7 + ax_2^5 - bx_2^3 + 1$$

entonces $$\underbrace{-(2^7{}_1 + ax^5{}_1 - bx^3{}_1 + 1)}_{p(x_1)} > \underbrace{-(2x_2^7 + ax_2^5 - bx_2^3 + 1)}_{p(x_2)}$$

$$x_1 < x_2 \rightarrow p(x_1) > p(x_2)$$

III) Es verdadero, en la parte II) probamos que p(x) es estrictamente decreciente y además p(x) es de grado impar y por lo tanto tiene al menos una raíz real, pero al ser estrictamente decreciente la raíz real es única.

PROBLEMA 7

De la ecuación $p(x) = 4x^4 + 1 = 0$ se afirma.

I) tiene cuatro raíces reales

II) Sobre los números reales el polinomio p(x) tiene exactamente dos factores primos.

III) Tiene dos raíces que son números racionales.

Solución:

I) $p(x) = 4x^4 + 1$ se puede escribir en la forma

$$p(x) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - 4x^2$$
$$= (2x^2 + 1 + 2x)(2x^2 + 1 - 2x)$$
$$= (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$$
$$p(x) = (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$$

cada factor cuadrático tiene discriminante negativo, entonces las raíces de p(x) son números complejos, luego I) es falso.

II) Es verdadero porque los factores de p(x), son $2x^2 + 2x + 1$, $2x^2 - 2x + 1$ y éstos son primos.

III) Es falso, por lo desarrollado en I).

PROBLEMA 8

Si uno de los términos del cociente notable

$$\frac{x^a + y^b}{x + y^2} \text{ es } -x^4y^{10}$$

calcular a + b – 3.

Solución:

Se debe cumplir (por ser cociente notable)

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} \text{ de donde } b = 2a$$

$$T_k = (-1)^{k+1}x^{a-k} \quad y^{2(k-1)}$$

por dato $$-x^4y^{10} = (-1)^{k+1}x^{a-k}y^{2(k-1)}$$

de donde, $4 = a - k$ y $10 = 2(k - 1)$, de aquí obtenemos $k = 6$, $a = 10$ y luego $b = 20$,

finalmente, $$a + b - 3 = 10 + 20 - 3$$

$$= 27$$

PROBLEMA 9

Simplificar:

$$E = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\ \sqrt[6]{16 - 2\sqrt{48}}$$

Solución:

Escribimos la expresión E en la forma

$$E = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\ \sqrt[3]{\underbrace{\sqrt{16 - 2\sqrt{48}}}_{1}}$$

descomponemos (1) en radicales simples lo cual no da (verifiquen)

$$\sqrt{16 - 2\sqrt{48}} = \sqrt{12} - 2 = 2\sqrt{3} - 2$$

entonces:

$$E = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\sqrt[3]{2\sqrt{3} - 2}$$

$$E = \sqrt[3]{2\left(\sqrt{3}+1\right)}\ \sqrt[3]{2\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$E = \sqrt[3]{4\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$E = \sqrt[3]{4(2)}$$

$$E = \sqrt[3]{8}$$

$$E = 2$$

PROBLEMA 10

Calcular $a + b$, si la raíz cuadrada de $p(x) = 9x^4 + ax^3 + bx^2 - 67x + 54$ deja un resto de $3x + 5$.

Solución: Planteamos

$$9x^4 + ax^3 + bx^2 - 70x + 49 = (3x^2 + mx + 7)^2$$

de donde obtenemos por igualdad de polinomios.

$6m = a$		$a = -30$
$m^2 + 42 = b$	entonces	$b = 67$
$14m = -70$	y luego	$a + b = 37$

PROBLEMA 11

Dar la suma de coeficientes del MCM de los polinomios:

$$p(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1, \quad q(x) = (x^2 + x + 1)^3 (x + 1)$$

Solución:

Factorizando p(x) y q(x) obtenemos

$$p(x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$q(x) = (x^2 + x + 1)^3(x + 1)$$

entonces el MCM es: $(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)^3(x + 1)$

suma de coeficientes es: - 54

PROBLEMA 12

Si $a + b + c = 0$, hallar $E = \dfrac{a^9 + b^9 + c^9 - 3(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(a^3 + c^3)}{6(a^3 + b^3 + c^3) - 15abc}$.

Solución:

$$E = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^3}{6(3abc) - 15abc} = 9a^2b^2c^2$$

PROBLEMA 13

Si $\dfrac{x + 4}{x^3 - 3x + 2} = \dfrac{M}{x - 1} + \dfrac{N}{(x - 1)^2} + \dfrac{P}{x + 2}$. Calcular $9M + 3N + 9P$

Solución:

Ordenando y multiplicando

$$x + 4 = M(x - 1) + N(x + 2) + p(X - 1)^2$$

Si $x = 1$ entonces $5 = 0 + N(3) + 0$ entonces $N = \frac{5}{3}$

Si $x = -2$ entonces $2 = 0 + 0 + 9P$ entonces $P = -\frac{2}{9}$

Si $x = 0$ entonces $4 = M(-2) + \frac{5}{3} + 9\left(\frac{2}{9}\right)$.

PROBLEMA 14

Si $x = \sqrt[3]{2\sqrt{3} + 2} - \sqrt[3]{2\sqrt{3} - 2}$, determinar el valor de $E = x^3 + 6x + 5$.

Solución:

Si $\quad x = \sqrt[3]{2\sqrt{3} + 2} - \sqrt[3]{2\sqrt{3} - 2}$

Entonces

$$x^3 = (2\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} - 2)$$
$$- 3\sqrt{(2\sqrt{3} + 2)(2\sqrt{3} - 2)}\left(\sqrt[3]{2\sqrt{3} + 2} - \sqrt[3]{2\sqrt{3} - 2}\right)$$

luego

$$x^3 = 4 - 3\left(\sqrt[3]{12 - 4}\right)(x)$$

$$x^3 = 4 - 6x$$

entonces: $\quad x^3 + 6x - 4 = 0$

finalmente: $\quad E = x^3 + 6x + 5 = 9$

PROBLEMA 15

Hallar la raíz cuadrada de $2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x - 6}$

Solución:

Nos piden $\sqrt{2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x - 0}}$ lo tratamos como una descomposición de radicales dobles a simples, por lo cual calculamos

$$c = \sqrt{(2x - 1)^2 - \left(2\sqrt{x^2 - x - 6}\right)^2} = 5$$

luego

$$\sqrt{2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x - 6}} = \sqrt{\frac{2x - 1 + 5}{2}} - \sqrt{\frac{2x - 1 - 5}{2}}$$

$$= \sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3}$$

6.9 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Dado el polinomio

$$p(xy) = (n-1)\,x^{5-n}y^{3} + x^{4}y^{n-3} + 7x^{n}y^{4} + n^{2}$$

hallar la suma de sus coeficientes, para el mayor valor que puede tomar n.

A) 35 B) 36 C) 37 D) 25 E) 38

PROBLEMA 2

Calcular el grado relativo respecto a x en el polinomio

$$p(x\ y\ z) = 2^{a}x^{a-1}y^{3b+2}z^{c-2} - 3^{b}y^{b-3}x^{2a-3} + z^{c-3}y^{b}x^{2a-2}$$

si el grado absoluto es 36 + 8 y el grado relativo respecto a z es 3, $b \in N$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA 3

Calcular el número de términos del siguiente polinomio completo y ordenado

$$p(x) = m\,x^{6m+5n+p} + n\,x^{4m+6n+4p} + x^{5m+4n+5p} + x^{6m+5n} + \ldots$$

si $m, n, p \in N$.

A) 82 B) 84 C) 86 D) 88 E) 89

PROBLEMA 4

Si $a, b \in N$ y $a > b > 3$

$$p(x) = abx^{a}y^{b+1}(x^{a+1}y^{2} + x^{a}y + x^{a-1} + x^{a-2} + x^{a-3} + \ldots + x^{2} + x + 1)$$

determinar el número de términos que le faltan respecto a x menos el número de términos que le faltan respecto a x menos el número de términos que le faltan respecto a y para ser completo.

A) $a-b-2$ B) $a-b+2$ C) $a-b+1$ D) $a-b-1$ E) $a-b$

PROBLEMA 5

Sea el polinomio homogéneo

$$p(x\ y\ z\ w) = y^{c}z^{a+b}w^{b+1} + y^{a+2}z^{c+2}w^{a}x^{b-3} + z^{3c-1}w^{c}x^{b-2}$$

si es completo con respecto a x, hallar

E = grado relativo respecto a z + grado relativo respecto a w.

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

PROBLEMA 6

Si $a^3 + b^3 + c^3 = ab + ac + bc$ simplificar

$$E = \frac{(1-a)(bc) + (1-b)(ac) + (1-c)(ab)}{a(a-b) + b(b-c) + c(c-a)}$$

A) a+b+c B) a+b-c C) a-b-c D) 0 E) 1

PROBLEMA 7

Si $x^2 - 3x + 1 = 0$. Hallar $E = x^6 + \frac{1}{x^6}$

A) 322 B) 320 C) 325 D) 327 E) 328

PROBLEMA 8

En el desarrollo del siguiente cociente notable $\frac{x^{45} - y^{30}}{x^3 - y^2}$ el grado absoluto del término de lugar k cortado a partir del primer término excede en 4 al grado absoluto del término que ocupa el lugar (k-2) contado a partir del último término. Determinar el valor de k.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

PROBLEMA 9

Determinar el número de términos del cociente notable $\frac{x^{8n} - y^{9m-2}}{x^{m-1} - y^{n+2}}$, $m, n > 0$, sabiendo que el quinto término de su desarrollo es $x^{27}y^{44}$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

PROBLEMA 10

En cuantos factores primos puede descomponerse el siguiente polinomio

$$p(x) = x^2(x^4 + 8x^2 + 87) + 9(x^4 - 1)$$

A) 4 B) 3 C) 10 D) 5 E) 2

PROBLEMA 11

Determinar el valor de

$$E = \sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{5 - \sqrt{24}} + \ldots + \sqrt{(2n+1) - \sqrt{(2n+1)^2 - 1}}, \; n \in N$$

A) $\sqrt{n}$ B) $\sqrt{n+1}$ C) $\sqrt{n} - 1$ D) $\sqrt{n+1} - 1$ E) $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$

PROBLEMA 12

Efectuar la descomposición en radicales simples de

$$E = \sqrt{1 + 2 + 3 + ... + 2n + 2n\sqrt{2n}}$$

A) $\sqrt{n} + 1$ B) $\sqrt{2n} + 1$ C) $\sqrt{n}$ D) $n\sqrt{2} + \sqrt{n}$ E) $\sqrt{n} - 1$

PROBLEMA 13

Hallar la raíz cuadrada de

$$(x + 1)^2 - 2\left[x + \sqrt{x^2 - x - 6} + \frac{1}{2}\right] - (x - 1)^2$$

A) $\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 2}$ B) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3}$ C) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 2}$

D) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3}$ E) $\sqrt{x} - 1$

PROBLEMA 14

Racionalizar

$$\frac{10}{2 - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{18}}$$

A) $\sqrt[3]{5} + 2$ B) $\sqrt[3]{9} + 1$ C) $\sqrt[3]{9} - 1$ D) $\sqrt[3]{12} + 2$ E) $\sqrt[3]{12} + 1$

PROBLEMA 15

Hallar el residuo de dividir $x^7 + x^6 - x^2 + ax + 6$ entre $x + 1$, si la suma de los coeficientes del cociente es 3.

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

PROBLEMA 16

El resto que se obtiene al efectuar la división: $\dfrac{ax^{3a} + bx^{3b+1} + cx^{3c+2}}{x^2 + 1 + x}$

A) $(a - b)x + b - c$ B) $(b - c)x + a - c$ C) $(c - a)x + a - b$ D) $(a - b)x + c - a$. E) $(b - c)x + a - b$

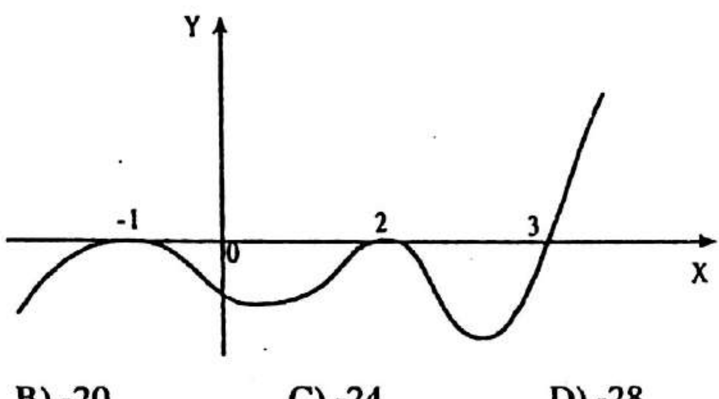
PROBLEMA 17

Sea p(x) un polinomio de grado n tal que $p(2x + 1) - p(x) = x^3 - 1$, hallar el resto de dividir p(x) entre $x - 3$ menos el resto de dividir p(x) entre x

A) 1 B) -2 C) 2 D) 3 E) -3

PROBLEMA 18

Si la gráfica de un polinomio mónico p(x) de grado 7 está dado por la gráfica adjunta, si p(0) = -12, hallar la suma de sus coeficientes.



A) -16 B) -20 C) -24 D) -28 E) -32

PROBLEMA 19

El siguiente polinomio

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$$

A) 5 raíces simples
B) 2 raíces de multiplicidad 2
C) 1 raíz de multiplicidad 2 y otra de multiplicidad 3
D) 1 raíz de multiplicidad 4
E) 1 raíz de multiplicidad 5.

PROBLEMA 20

Sabiendo que $1 - \sqrt{2}$ es una raíz de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0$, hallar las demás raíces.

A) $-4,\ 1-\sqrt{2}$ B) $4,\ 1+\sqrt{2}$ C) $4,\ \sqrt{2}-1$ D) $-4,\ \sqrt{2}-1$ E) $1,\ 1+\sqrt{2}$

PROBLEMA 21

Si a, b, c (distintos entre si) son las raíces de la función polinomial

$$p(x) = x^3 + mx^2 + nx + k,$$

calcular

$$E = \frac{(abc)n(a+b+c)}{(ab+ac+bc)(mk)}$$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) -2

PROBLEMA 22

Si x_1, x_2, x_3 son las raíces de la función polinomial $p(x) = x^3 + 2x - 1$. Determinar el residuo de la división

$$\frac{p(x) - p\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)}{x - 2}$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 3 E) 1/3

6.10 TEST DE AUTOEVALUACION

PROBLEMA 1

Sea el polinomio

$p(xy) = 4x^{2n-6}y^5a^{n-1} - 12x^{n+2}a^{n-4}y^{n-4} + 6x^{n-5}y^{n-7}b^{n+1} + 2x^{9-n}b^n$, a y b constantes no nulas.

Hallar el valor de verdad de:

I) El mínimo valor de n es 8

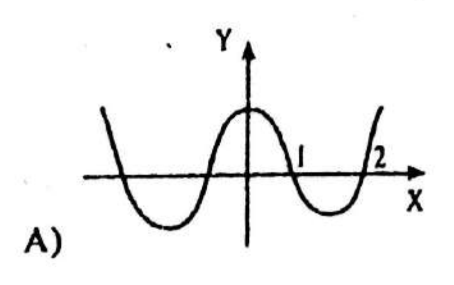
II) El máximo valor de n es 9

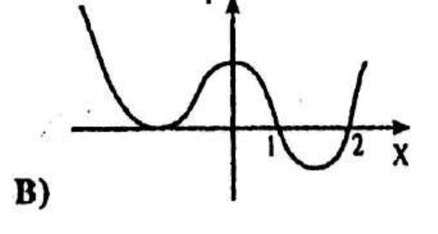
III) El mínimo grado absoluto que puede tomar p(xy) es 13.

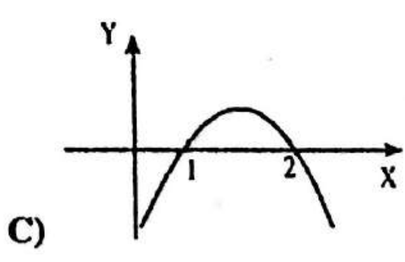
A) VVV B) VFF C) FVF D) VFV E) FVV

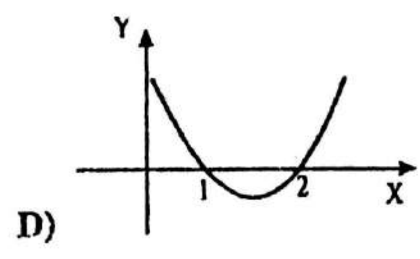
PROBLEMA 2

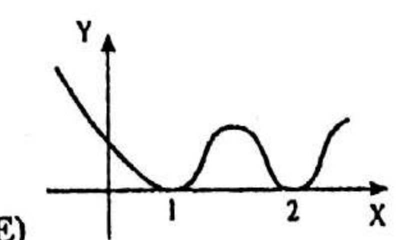
Si $p(x) = x^4 - 15x + 14$, indicar cual de las siguientes figuras representa mejor la gráfica de p(x).











PROBLEMA 3

Calcular la suma de coeficientes del polinomio cociente que se obtiene de la siguiente división

$$\left[(x-3)^7 + (x-2)^5 + 2x - 1\right] \div (x^2 - 5x + 6)$$

A) -69 B) 69 C) -65 D) -63 E) 63

PROBLEMA 4

Sean los polinomios $p(x) = x^3 - ax^2 + 4$ y $q(x) = x^3 - bx^2 + 16x - 12$, que tienen una raíz doble (multiplicidad 2) común α, $\alpha \neq 0$, hallar $\frac{b-a}{\alpha}$

A) 2 B) -2 C) 3 D) -3 E) 0

PROBLEMA 5

Con respecto al polinomio $p(x) = x^5 + 3x - 10$ se afirma.

I) Todas sus raíces son reales

II) Tiene exactamente una raíz real no racional

III) Una raíz real se encuentra en el intervalo [0 2]

Decir el valor de verdad de tales afirmaciones

A) VVV B) FVV C) FFV D) FFF E) VFV

PROBLEMA 6

El polinomio $p(x\ y\ z) = z^2x^2 + z^3 - 2y^3 + xy^2 - axz^2 - ax^2 + 4xy + xz - 2yz$ es divisible por $2x - y^2 - z$. Dar el valor de $p(1, -1, 0)$.

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

PROBLEMA 7

Si se cumple que: $(a^4 + a^{-4} - 5) / (a^2 + a^{-2}) = 6$, $a > 0$. Calcular $a + a^{-1}$.

A) 2 B) 18 C) 7 D) 12 E) 3

PROBLEMA 8

Los polinomios $12x^3 + ax + 18$ y $4x^3 - \frac{b}{3}x + 3$ admiten un factor común de la forma $6x + c$. Calcular el valor de $(a + b)c$.

A) -53 B) -54 C) 0 D) 53 E) 54

PROBLEMA 9

El MCD de $p(x) = x(x-a)^2(b+x)$ y $q(x) = bx^2(x-a)(x-b)$ es $x^2 - x$. El cociente de su MCM entre $bx^4 - b^3x^2$ es

A) x-1 B) x^2-4 C) $2x^2$-1 D) $(x-1)^2$ E) $(x-y)^2$

PROBLEMA 10

Si $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{8}{2x+y}$ evaluar: $\frac{x^3y - xy^3}{x^4 - y^4}$

$$\frac{p(x) \div p\left(\frac{1}{x1} + \frac{1}{x2} + \frac{1}{x3}\right)}{x-2}$$

A) 2/5 B) 7/5 C) 10/17 D) 1//5 E) 1

6.11 CLAVE DE RESPUESTAS

Problemas propuestos:

01) C	06) A	11) D	16) B	21) A
02) C	07) A	12) D	17) A	22) A
03) A	08) C	13) D	18) E	
04) C	09) D	14) D	19) C	
05) D	10) E	15) E	20) B	

Test de autoevaluación

1) E	6) A
2) D	7) E
3) D	8) E
4) A	9) A
5) C	10) A



7.0 OBJETIVOS

Debe quedar claro la necesidad de extender los números reales a los números complejos y se debe conocer el álgebra básica de los números complejos.

La cuestión de resolver ecuaciones algebraicas a llevado al hombre desde los números naturales N al pretender resolver ecuaciones como; $x + 2 = 1$, a los números enteros Z donde no existe solución para ecuaciones del tipo; $2x + 3 = 0$, a los números racionales Q que tiene limitaciones para resolver ecuaciones como: $x^2 - 2 = 0$, hasta llegar a los números reales. Sin embargo sabemos que no existe ningún número real x con la propiedad $x^2 + 1 = 0$, entonces se hace necesario extender el conjunto de los números reales IR, tal extensión es el conjunto de los números complejos C.

7.1 LOS NUMEROS COMPLEJOS

DEFINICIÓN 1

El conjunto de los números complejos es el conjunto $C = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$, donde se han definido dos operaciones:

Suma: Sean $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ de C entonces la suma de ellos es; $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Multiplicación: Si $z_1 = (x_1, x_2)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ son elementos de C entonces la multiplicación de ellos es:

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

EJEMPLO 1

$$z_1 = (1, 0), \qquad z_2 = (0, 1)$$

$$z_1 + z_2 = (1, 1)$$

$$z_1z_2 = (1\text{x}0 - 0\text{x}1, 1\text{x}1 + 0\text{x}0) = (0, 1)$$

EJEMPLO 2

$z_1 = (1, 1), \ z_2 = (1, 2)$

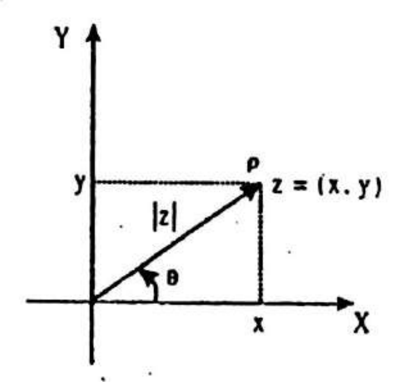
$z_1 + z_2 = (2, 3)$

$z_1 z_2 = (1 \times 1 - 1 \times 2, 1 \times 2 + 1 \times 1) = (-1, 3)$

7.2 REPRESENTACION GEOMETRICA

Puesto que los números complejos son pares ordenados (vectores), se les puede representar gráficamente:

Consideremos un plano y un sistema de ejes coordenados cartesianos y tomamos un número complejo z = (x, y).

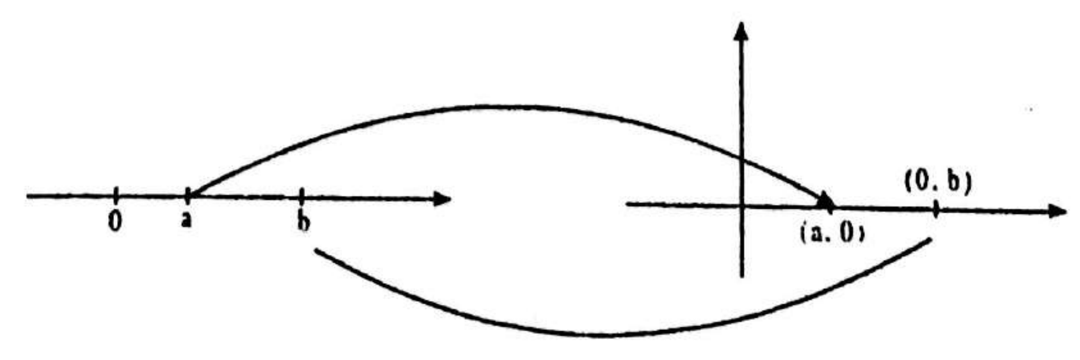


Esta representación asegura una correspondencia una a una entre los números complejos y los puntos del plano cartesiano, el plano se denomina el plano complejo. Los ejes coordenados se llaman los ejes real e imaginario del plano z. El punto P se llama número complejo.

Notación: $x = Re(z)$ $y = Im(z)$.

Los números reales como subconjuntos de los números complejos.

Es posible establecer una correspondencia uno a uno (una biyección) entre el conjunto de los números IR y el conjunto $\{(x, 0) / x \in IR\}$ es el eje real.



Es decir $a \longrightarrow (a, 0)$

$b \longrightarrow (b, 0)$

Además esta correspondencia preserva la suma y la multiplicación

$$a + b \longrightarrow (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0)$$

$$a \cdot b \longrightarrow (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0)$$

En matemáticas está correspondencia uno a uno (biyección) que preserva las operaciones se llama isomorfismo.

De esto podemos decir que entre los conjuntos $\mathbb{R} \sim \{(x, 0)/ x \in \mathbb{R}\}$ uno representa muy bien al otro o sea uno de ellos se identifica en el otro y diremos, aunque esto no es exactamente así, el conjunto de los números reales es un subconjunto de conjunto de los números complejos. Además esto nos permite identificar el número complejo (a, 0) con el número real

$$(a, 0) = a,$$

y $\quad z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0,1) = x + y(0,1)$

y si llamamos $i = (0, 1)$ se tiene

$$z = x + y(0, 1) = x + yi \qquad (*)$$

se cumple que: $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0x0 - 1x1, 0x1 + 0x1) = (-1, 0) = -1$

La igualdad (*) es la representación clásica de los números complejos

7.3 MODULO Y ARGUMENTO DE UN NUMERO COMPLEJO

DEFINICIÓN 2

El valor absoluto o módulo de un número complejo $z = (x, y)$ es la longitud del vector (x, y) es decir:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

EJEMPLO 1

$$|(2,3)| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

EJEMPLO 2

$$|(3,-1) - (2,4)| = |(1,-5)| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

DEFINICIÓN 3

El argumento o amplitud de un número complejo distinto de cero $z = (x, y)$, denotado por Arg(z), es una medida en radianes (grados) del ángulo de inclinación del vector (x, y).

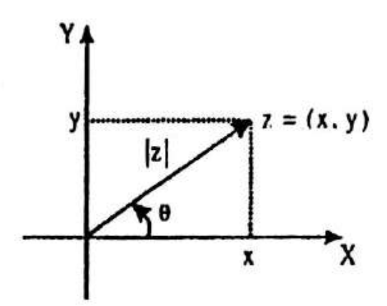
De la figura $Arg(z) = \theta$.

Sea $z = (x, y)$

$x = |z|Cos\theta$

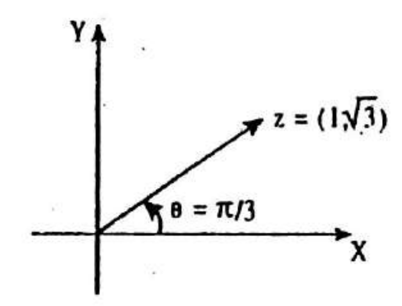
$y = |z|Sen\theta$

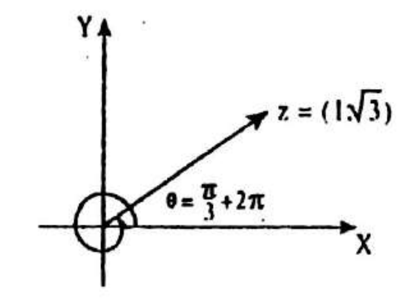
$Tg\theta = \dfrac{y}{x}$

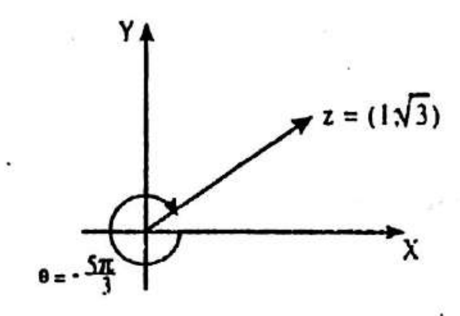


EJEMPLO 3

$z = (1, \sqrt{3})$ como $tg\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ entonces $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ó $\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi$ ó $\theta = -5\pi/3$ etc.







Observación:

El argumento principal de $z = (x, y)$ es el valor de $Arg(z) = \theta$ tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Nosotros no daremos mayor importancia al concepto de argumento principal.

7.4 CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO

DEFINICIÓN 4

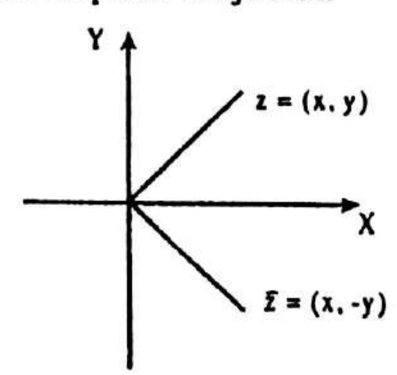
Si $z = (x, y)$ es un número complejo, entonces $\bar{z} = (x, -y)$ se llama conjugado complejo o simplemente conjugado de z.

EJEMPLO 1

Si $z_1 = (1, -2)$, $z_2 = (1, 0)$ y $z_3 = (0, 1)$ entonces sus conjugados son respectivamente:

$$\bar{z}_1 = (1, 2), \quad \bar{z}_2 = (1, 0), \quad \bar{z}_3 = (0, -1)$$

Gráficamente z y $\overline{z}$ son simétricos respecto al eje real.



Propiedades

1. Si z_1 y $z_2 \in$ C entonces

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$$

Si $z = (x, y) \in C$, $z\overline{z} = (x, y)(x, -y) = (x^2 + y^2, 0) = x^2 + y^2$

2. Del módulo de un complejo

   i) $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ entonces $z = 0$

   ii) $|rz| = |r|\,|z|$, $r \in \mathbb{R}$ y $z \in C$

   iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\forall\, z_1, z_2 \in C$

   iv) $z\overline{z} = |z|^2$

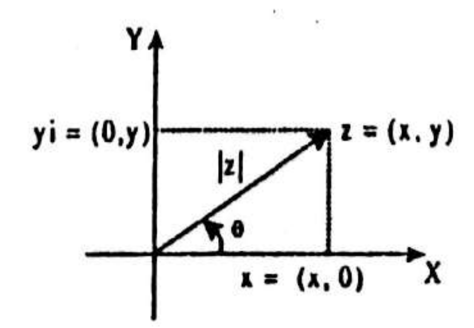
   v) $|z_1 z_1| = |z_1||z_2|$ en efecto

   $|z_1 z_2| = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\overline{z}_1 \overline{z}_2) = (z_1\,\overline{z}_1)(z_2\,\overline{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2$

   por lo tanto $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

7.5 REPRESENTACION DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = (x, y) \in C$



Forma rectangular

De lo tratado en 7.2: $z = x + yi$, es la forma rectangular del número complejo $z = (x, y)$.

Asi

$$z_1 = (1, 2) = 1 + 2i \qquad y \qquad z_2 = (-2, 3) = -2 + 3i$$

entonces

$$z_1z_2 = (1, 2)(-2, 3) = (-8, -1)$$

$$z_1z_2 = (1 + 2i)(-2 + 3i) = -2 + 3i - 4i + 6i^2$$

$$= -2 + 3i - 4i - 6 = -8 - i$$

Forma polar

Si $z = (x, y)$ sabemos que $x = r\text{Cos}\theta$, $y = r\text{Sen}\theta$ y $|z| = r$

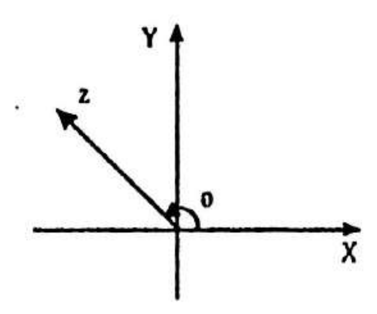
Así obtenemos

$$z = (x, y) = x + iy = r(\text{Cos}\theta, \text{Sen}\theta) = r(\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta)$$

es la forma polar del número complejo $z = (x, y)$.

EJEMPLO 2

Sea $z = -1 + i = (-1, 1)$



$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\quad \text{Tg}\theta = \dfrac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \theta = 3\pi/4$

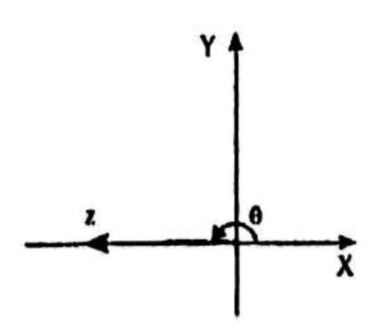
entonces

$$z = \sqrt{2}\,(\text{Cos}3\pi/4, \text{Sen}3\pi/4)$$

$$z = \sqrt{2}\,(\text{Cos}3\pi/4 + i\ \text{Sen}3\pi/4)$$

EJEMPLO 3

Si $z = -4$, $|z| = 4$ $\quad \theta = \pi$



Luego $z = 4(\text{Cos}\pi + i\ \text{Sen}\pi) = 4(\text{Cos}\pi, \text{Sen}\pi)$

Forma exponencial

De $z = (x, y) = \rho(\text{Cos}\theta, \text{Sen}\theta)$, si definimos

$$e^{i\theta} = (\text{Cos}\theta, \text{Sen}\theta) = \text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta$$

entonces $z = re^{i\theta}$, es la forma exponencial del número complejo $z = (x, y)$.

La definición $e^{i\theta} = (\text{Cos}\theta, \text{Sen}\theta) = \text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta$ satisface la propiedad de los exponentes.

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\text{Cos}\theta_1 + i\,\text{Sen}\theta_1)(\text{Cos}\theta_2 + i\,\text{Sen}\theta_2) \\ &= (\text{Cos}\theta_1\text{Cos}\theta_2 - \text{Sen}\theta_1\text{Sen}\theta_2) + i\,(\text{Cos}\theta_1\text{Sen}\theta_2 + \text{Sen}\theta_1\text{Cos}\theta_2) \\ &= \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

$$z_1 = (-1, 1) = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$$

$$z_2 = (-4) = 4\,e^{i\pi}$$

7.6 OPERACIONES CON LOS NUMEROS COMPLEJOS

Si z_1, z_2 y z_3 son números complejos cualesquiera entonces la suma y multiplicación satisface:

A1: $z_1 + z_2 \in C$

A2: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

A3: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

A4: Hay un único número complejo 0 tal que

$$z + 0 = z, \quad \forall\, z \in C$$

A5: Para cada $z \in C$, existe un único elemento denotado por $-z$ tal que

$$z + (-z) = 0$$

M1: $z_1 z_2 \in C$

M2: $z_1 z_2 = z_2 z_1$

M3: $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$

M4: Existe un único elemento en C, denotado por 1 diferente de 0 tal que

$$z \,.\, 1 = z, \quad \forall\, z \in C$$

M5: Para cada $z \in C$, diferente de 0, hay un único elemento en C, denotado por z^{-1}, tal que: $z z^{-1} = 1$

D: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

El número $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ y $-z = (-x, -y)$ son las que se mencionan en A4 y A5

El inverso multiplicativo de $z = (x, y) \neq (0, 0)$a es el número $z^{-1} = (a, b)$ tal que

$$zz^{-1} = (x, y)(a, b) = (xa-yb, xb+ya) = (1, 0) = 1$$

o sea

$$xa - yb = 1$$

$$ya + xb = 0$$

resolviendo este sistema para a y b tenemos

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad b = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

así

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right), \text{ pues } x^2 + y^2 \neq 0$$

Ahora podemos definir las operaciones de sustracción (resta) y división.

DEFINICIÓN 5

(Sustracción) Para z_1 y $z_2 \in C$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2^{\cdot})$$

DEFINICIÓN 6

(División) Para z_1 y $z_2 \in C$ con $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$$

EJEMPLO 1

Hallar z^{-1} ,si $z = (x, y) \neq (0, 0)$ usando la conjugada de $\bar{z}$.

Solución:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

EJEMPLO 2

Si $z_1 = (1, 2)$ y $z_2 = (-2, 3)$. Calcular $\frac{z_1}{z_2}$

Solución:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(1+2i)(-2-3i)}{(-2)^2+(3)^2} = \frac{4-7i}{13} = \left(\frac{4}{13}, \frac{-7}{13}\right)$$

EJEMPLO 3

Si $z = x + iy$ entonces $Re(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ y $Im(z) = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Propiedad:

Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

i) $z_1 z_2 = r r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

ii) Si $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Es decir: para multiplicar dos números complejos en forma polar (exponencial) multiplicamos los módulos y sumamos los argumentos y, para dividir dos números complejos en forma polar, dividimos los módulos y restamos los argumentos.

Es decir

i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

ii) Si $z_2 \neq 0$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

FORMULA DE DEMOIVRE

Se puede generalizar:

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2| \ldots |z_n|$$

$$Arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = Arg(z_1) + Arg(z_2) + \ldots + Arg(z_n)$$

Si $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, $|z| = r$

$$|z^n| = |z|^n = r^n$$

$$Arg(z^n) = nArg(z) = n\theta$$

De esto si $z = x + iy = r(Cos\theta + iSen\theta) = r(Cos\theta, Sen\theta) = re^{i\theta}$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(Cosn\theta + i\,Senn\theta)$$

en particular si $\rho = 1$

$$(e^{i\theta})^n = (Cos\theta, Sen\theta)^n = (Cosn\theta + i\,Senn\theta)$$

FORMULA DE DEMOIVRE

Ejercicio: Verificar que la fórmula de Demoivre se cumple para $n \in \mathbb{Z}$.

EJEMPLO 4

Calcular $(4 + i\,4\sqrt{3})^5$

Solución:

$$4 + i\,4\sqrt{3} = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8(\text{Cos}\,\frac{\pi}{3} + i\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{3}) = 8e^{i\pi/3}$$

entonces $\quad (4 + i\,4\sqrt{3})^5 = (8e^{i\pi/3})^5 = 8^5 e^{5\pi/3}$

$$= 8^5(\text{Cos}5\pi/3 + i\,\text{Sen}\,5\pi/3)$$

$$= 8^5(1/2 - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

EJEMPLO 5

Calcular $z = \left[\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta}\right]^4$

Solución:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$$

$$z_3 = \text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta = e^{i\theta}$$

entonces

$$z = \left[\frac{z_1 z_2}{z_3}\right]^4 = \left[2\sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}-\theta)}\right]^4 = \left[2\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{12}-\theta)}\right]^4$$

$$= 64\,e^{i(\frac{7\pi}{3}-4\theta)}$$

EJEMPLO 6

si $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **y** $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, **hallar** $z_1^n + z_2^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Solución:

$$z_1 = e^{i2\pi/3} \quad \text{y} \quad z_2 = \bar{z}_1 = e^{-i2\pi/3}$$

entonces

$$z_1^n + z_2^n = (e^{i2\pi/3})^n + (e^{-i2\pi/3})^n$$

$$= e^{i2n\pi/3} + e^{-i2n\pi/3}$$

$$= (\text{Cos}\,\frac{2n\pi}{3} + i\,\text{Sen}\,\frac{2n\pi}{3}) + (\text{Cos}\,\frac{2n\pi}{3} - i\,\text{Sen}\,\frac{2n\pi}{3})$$

$$= 2\text{Cos}\,\frac{2n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

7.7 RAIZ DE UN NUMERO COMPLEJO

Nos planteamos el problema de hallar las raíces n-ésimas de un número complejo $z \neq 0$. Una raíz n-ésima de z es un número complejo w tal que $w^n = z$.

Sea $w = \rho e^{i\varphi}$ raíz n-ésima de $z = re^{i\theta}$

O sea $w^n = \rho^n e^{in\varphi} = z = re^{i\theta}$

de esto $\rho^n = r$ y $e^{in\varphi} = e^{i\theta}$

Como ρ y r son positivos, $\rho = r^{1/n}$. Además $e^{in\varphi} = e^{i\theta}$ si y solo si $n\varphi = \theta + 2\pi k$, k entero

o sea $\varphi = \dfrac{\theta + 2\pi k}{n}$

por consiguiente una raiz n-ésima de $z = re^{i\theta}$ es

$$w_k = r^{1/n}\left[\operatorname{Cos}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

pero es suficiente tomar k = 0, 1, 2, ..., n-1, pues los otros valores que toma k repiten los valores de w_k.

EJEMPLO 1

Calcularñ $(4\sqrt{3} - 4i)^{1/3}$ osea las raíces cúbicas de $z = 4\sqrt{3} - 4i$.

Solución:

Como $z = 4\sqrt{3} - 4i = 8(\frac{1}{2}\sqrt{3} - i\frac{1}{2}) = 8(\operatorname{Cos}(-\pi/6) + i\operatorname{Sen}(-\pi/6))$

entonces

$$w_k = 8^{1/3}[\operatorname{Cos}\left(\frac{-\pi/6 + 2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{-\pi/6 + 2k\pi}{3}\right)), \quad k = 0, 1, 2$$

por lo tanto

$$w_0 = 2\,(\operatorname{Cos}(-\pi/8) + i\operatorname{Sen}(-\pi/18))$$

$$w_1 = 2\,(\operatorname{Cos}(11\pi/18) + i\operatorname{Sen}(11\pi/18))$$

$$w_2 = 2\,(\operatorname{Cos}(23\pi/18) + i\operatorname{Sen}(23\pi/18))$$

Propiedad geométrica de la raíces

Las raíces n-ésimas de $z = re^{i\theta}$ se encuentran sobre una circunferencia de radio $r^{1/n}$ con centro en el origen y se hallan igualmente espaciadas y una de las raíces tiene un argumento igual a $\frac{1}{n}\operatorname{Arg}(z)$.

EJEMPLO 2

Hallar la raíz cúbica de $z = -1 + i$.

Solución:

$$z = -1 + i = \sqrt{2}\,(\text{Cos}3\pi/4 + i\ \text{Sen}3\pi/4)$$

entonces las raíces cúbicas de z son:

$$w_k = \sqrt[6]{2}\left(\text{Cos}\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right)\right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\text{Cos}\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\text{Cos}\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$$

Polinomios sobre los complejos

Un polinomio sobre el conjunto (campo) de los números complejos tiene la forma

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Donde los $a_i \in C$ y z toma valores complejos, n es su grado.

El siguiente teorema asegura que una ecuación como $P(z) = 0$, $n \geq 1$, siempre tiene solución sobre el campo de los complejos.

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ sobre el campo de los complejos con $n > 0$, tiene exactamente n raíces, algunas de las cuales se pueden repetir y $P(z)$ puede ser expresado en la forma.

$$P(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2)\dots(z - r_n).$$

EJEMPLO 3

Resolver la ecuación: $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$

Solución:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(1)(5-i)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15-8i}}{2}$$

como las raíces cuadradas de $-15 - 8i = 17(\text{Cos}\theta + i\ \text{Sen}\theta)$, $\text{Cos}\theta = -\frac{15}{17}$, $\text{Sen}\theta = -\frac{8}{17}$

entonces θ está en el tercer cuadrante:

$\sqrt{17}\ (\text{Cos}\theta/2 + i\ \text{Sen}\theta/2)$ y $\sqrt{17}\ (\text{Cos}(\theta/2+\pi) + i\ \text{Sen}(\theta/2+\pi)) = \sqrt{17}\ (\text{Cos}\theta/2 + i\ \text{Sen}\theta/2)$

ahora $\text{Cos}\theta/2 = \pm\sqrt{(1+\text{Cos}\theta)/2} = \pm 1/\sqrt{17}$ entonces $\text{Cos}\theta = -1/\sqrt{17}$

$\text{Sen}\theta/2 = \pm\sqrt{(1-\text{Cos}\theta)/2} = \pm 4/\sqrt{17}$ entonces $\text{Sen}\theta = -4/\sqrt{17}$

Entonces $\sqrt{-15-8i} = -1 + 4i,\ 1 - 4i$

Luego $z = \dfrac{3 - 2i \pm (1 - 4i)}{2} = 2 - 3i,\ 1 + i$

EJEMPLO 4

Si $p + qi$ es una raíz de:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0,$$

donde: $a_n, \ldots, a_0$, p y q son reales, probar que $p - qi$ es también una raíz.

Demostración:

Sea $p + qi = re^{i\theta}$ y satisface

$$a_n r^n e^{in\theta} + a_{n-1} r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \ldots + are^{i\theta} + a_0 = 0$$

tomando conjugado ambos lados

$$\overline{a_n r^n e^{in\theta}} + \overline{a_{n-1} r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} + \ldots + \overline{a_1 re^{i\theta}} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

$$a_n r^n e^{in\theta} + a_{n-1} r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \ldots + a_1 re^{i\theta} + a_0 = 0$$

como $re^{-i\theta} = p - qi$, entonces $p - qi$ es también raiz.

El resultado no vale si algún a_i es complejo.

7.8 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Calcular: $$z = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}, \qquad \text{n entero positivo}$$

Solución:

Como $1 + i = \sqrt{2}\ e^{i\pi/4}$ y $1 - i = \sqrt{2}\ e^{-i\pi/4}$

entonces: $$z = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n}{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{n-2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2\left(e^{i(\pi/4+\pi/4)}\right)^{n-2}(e^{i\pi/4})^2$$

$$= \left(e^{i\pi/2}\right)^{n-2}e^{i\pi/2} = 2i^{n-2}i = 2i^{n-1}$$

pues: $e^{i\pi/2} = i$.

PROBLEMA 2

Hallar la suma A de números complejos expresados así:

$$A = (1 + i) + (2 + i^2) + (3 + i^3) + (4 + i^4) + \ldots + (4n + i^{4n})$$

Solución:

Sumando separadamente

$$A = (1 + 2 + 3 + \ldots + 4n) + (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{4n})$$

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 4n = 2n(4n + 1)$, ahora consideremos

$$S_2 = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4} + \underbrace{(i^5 + \quad + i^8)} + \ldots + \underbrace{(i^{4n-3} + i^{4n-2} + i^{4n-1} + i^{4n})}$$

Es claro que $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$ entonces $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) = 0$

$\ldots,\ i^{4n-4}(i + i^2 + i^3 + i^4) = 0$, por lo tanto: $S_2 = 0$

Finalmente : $$A = S_1 + S_2 = 2n(4n + 1)$$

PROBLEMA 3

Sean los números complejos:

$$u = 1 + pi$$
$$v = m + ni$$

donde: $\begin{cases} i = (0,1) \\ p, m, n \quad \text{enteros positivos} \end{cases}$

Si, además, se cumplen: $$u + v = a + 7i$$

$$uv = -7 + 11i$$

donde a es un número comprendido entre 2 y 8, calcule $a^2 + p^2 + m^2 + n^2$

Solución:

$$u + v = (1 + m) + (p + n)i = a + 7i$$

$$uv = (m - pn) + (n + pm)i = -7 + 11i$$

esto si y solo si

$$1 + m = a$$

$$p + n = 7 \qquad ...(1)$$

$$m - pn = -7$$

$$n + pm = 7$$

En (1), reemplazando p de la segunda ecuación en la tercera:

$$m - n(7 - n) = -7$$

$$n^2 - 7n = -7 - m$$

luego,

$$(n - 7/2)^2 - 49/4 = -7 - m$$

$$(2n - 7)^2 = 21 - 4m \qquad ...(2)$$

como m y n son enteros positivos y $2 \leq a \leq 8$ entonces

$$2 \leq m + 1 \leq 8 \text{ si y sólo si } -7 \leq 21 - 4m \leq 17$$

Pero por (2), $0 \leq 21 - 4m \leq 17$, además, $21 - 4m$ es un cuadrado perfecto, así

$$21 - 4m = 1, 4, 9 \text{ ó } 16$$

entonces

$$4m - 21 = -1, -4, -9 \text{ ó } -16$$

$$4m = 20, 17, 12 \text{ ó } 5$$

finalmente,

$$m = 5 \text{ ó } 3$$

Si m = 3 en (1); $n + p = 7,\ n + 3p = 1$

entonces $2p = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow n = 5$ y satisface las otras igualdades.

Por tanto: $a^2 + p^2 + m^2 + n^2 = (3 + 1)^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 54$

Si m = 5 en (1); $n + p = 7,\ n + 5p = 11$

Entonces: $4p = 4 \Rightarrow p = 1,\ n = 6$, pero $m - pn \neq -7$

PROBLEMA 4

Hallar los $z \in C$ tal que sea conjugado con su cuadrado.

Solución:

Sea $z = re^{i\theta}$ entonces $\bar{z} = re^{i\theta}$ y $|z| = |\bar{z}| = r$

como $\bar{z} = z^2$ entonces $\bar{\bar{z}} = z = \overline{z^2} = (\bar{z})^2$

Reemplazando z por su forma exponencial:

$$z = re^{i\theta} = (re^{-i\theta})^2 = r^2e^{-i(2\theta)}$$

Esta igualdad es equivalente a

$$\begin{cases} r = r^2 \Leftrightarrow r = 1 \vee r = 0 \quad (\text{en } R) \\ e^{i\theta} = e^{i(2\theta)} \Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta_k = \dfrac{2k\pi}{3};\ k = 0,1,2. \end{cases}$$

Considerando $r = 1$ y $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$

$$k = 0 \Rightarrow z = e^{i\theta 0} = e^{i0} = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta 1} = e^{i(2\pi/3)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta 2} = e^{i(4\pi/3)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Considerando $r = 0 \Rightarrow |z| = r = 0 \Rightarrow z = 0$

De esto los posibles valores de z son:

$$z = 0,\ z = 1,\ z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

PROBLEMA 5

Demostrar que si $|z| < \dfrac{1}{2}$, entonces

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$$

Demostración:

$$|(1+i)z^3 + iz| = |x||(1+i)z^2 + i| \le |z|\left(|1+i||z|^2 + |i|\right) =$$

$$|z|\left(\sqrt{2}|z|^2 + 1\right) \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} < \frac{2}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

PROBLEMA 6

Probar que el número complejo $\sqrt[3]{4} - 2i$ es la raíz (solución) de p(z) = 0, siendo p(z) un polinomio de coeficientes enteros

Demostración:

Sea $z = \sqrt[3]{4} - 2i$ o $z + 2i = \sqrt[3]{4}$, elevando al cubo

$$z^3 + 3z^2(2i) + 3z(2i)^2 + (2i)^3 = 4$$

o sea $z^3 - 12z - 4 = i(8 - 6z^2)$,

elevando al cuadrado $p(z) = z^6 + 12z^4 - 8z^3 + 48z^2 + 96z + 80 = 0$,

que es una ecuación polinomial que tiene a

$$z = \sqrt[3]{4} - 2i \text{ como una raíz.}$$

PROBLEMA 7

Sea el número complejo: $z = (64)^2$.

a) Hallar $((64)^2)^{1/4}$ y $(64)^{1/2}$

b) ¿Tiene sentido $((64))^{1/4} = (64)^{1/2}$?

Solución:

a) $\sqrt[4]{(64)^2} = \sqrt[4]{4096}$ y las raíces son 8, -8, 8i, -8i y por valores 8y – 8.

b) No, pues $((64)^2)^{1/4}$ tiene cuatro raíces y $(64)^{1/2}$ tiene dos raíces.

PROBLEMA 8

Hallar las raíces sextas de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ que están en el tercer cuadrante.

Solución:

Como $$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}$$

Entonces $$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1/6} = e^{i\left[\frac{\pi/2+2k\pi}{6}\right]},\quad k = 0,1,\ldots,5$$

Se busca las raíces que están en el tercer cuadrante, es decir el argumento debe cumplir

$$\pi < \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{11}{4} < k < \frac{17}{4} \text{ entonces } k = 3,4$$

por lo tanto, las raíces buscadas son

$$e^{i\left[\frac{\pi/2+2(3)\pi}{6}\right]} = \cos 195° + i\,\text{sen}195°$$

$$e^{i\left[\frac{\pi/2+2(4)\pi}{6}\right]} = \cos 255° + i\,\text{sen}255°$$

PROBLEMA 9

Demostrar: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Demostración:

Sea: $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

$$= |z_1|^2 + \underbrace{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}_{} + |\bar{z}_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$\therefore\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

PROBLEMA 10

Hallar el producto de todos los z tal que:

$$(|iz + 4| + |\bar{z} + 4i|)\,|z + 3i| = 0$$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 15

Solución:

i) Se tiene: $|iz + 4| = |i(z - 4i)| = |i||z - 4i| = |z - 4i|$

ii) $|\bar{z} + 4i| = |\overline{\bar{z} + 4i}| = |z + \overline{4i}| = |z - 4i|$

iii) Reemplazando en la ecuación

$$(|z - 4i| + |z - 4i|)|z + 3i| = 0$$

$$2|z - 4i||z + 3i| = 0$$

$$\Leftrightarrow |z - 4i| = 0 \vee |z + 3i| = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 4i \ \vee\ z_2 = -3i$$

$$z_1 z_2 = 12$$

PROBLEMA 11

Hallar el gráfico del conjunto.

$$S = \{(z - 4i + 3) / \mathrm{Re}(z + 8 - 3i) + 2\,\mathrm{Im}(2 - z + i) \geq -3\}$$

Solución:

Sea $z = x'y'i$ y $z - 4i + 3 = x + yi$

Entonces $x' = x - 3,\quad y' = y + 4$

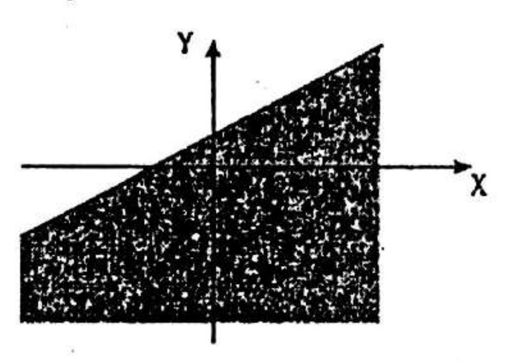
luego $\quad Re(z + 8 - 3i) + 2Im(2 - z + i) = Re((x - 3)+(4 + 4)i + 8 - 3i)$

$+ 2\,Im(2 - (x - 3) - (y + 4)i + 1) = x - 3 + 8 + 2(-y - 4) + 2$

$= x - 2y - 1 \geq -3$ entonces $x - 2y \geq -2$

Así

$$S = \{x + yi \,/\, x - 2y \geq -2\}$$



PROBLEMA 12

Hallar el gráfico del conjunto:

$$S = \{i - \bar{z} \,/\, |iz + 1 - i| \leq 1\}$$

Solución:

Método 1: Sea $w = x + yi = 1 - \bar{z}$ entonces $z = -x + (y - 1)i$

$\rightarrow iz = -(y - 1) - ix$

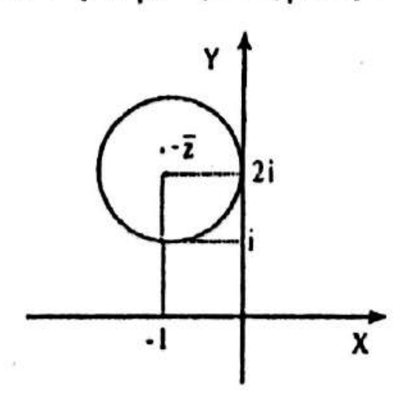
así $|iz + 1 - i| = |(2 - y) + (-x - 1)| \leq 1$

$\Leftrightarrow \; (x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$

S es un círculo de centro (-1, 2) y radio 1.

Método 2: Como $|iz - 1 - i| = |i||z + \frac{1}{2} - 1| = |z - i - 1| = |z - (1 + i)| \leq 1$

Entonces la gráfica de $S = \{z \,/\, |z - (1 + i)| \leq 1\}$ es



7.9 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Hallar un número complejo cuyo argumento es $\pi/3$, sabiendo además que el producto de dicho complejo por el complejo que se obtiene al permutar sus coeficientes es $16i$. Dar como respuesta la suma de la parte real con la parte imaginaria.

A) $-2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 2 D) $2+2\sqrt{3}$ E) $2-2\sqrt{3}$

PROBLEMA 2

Si $z \in C$ y $|z-1| = 1$. Calcular

$$\frac{Arg(z^2)}{Arg(z^2 - z)}$$

A) 2/3 B) 1 C) 3/2 D) 2 E) 3

PROBLEMA 3

Decir el valor de verdad de:

I Si $z + \overline{z} < 2$ entonces $|z| \leq 1$.

II $|z - i\overline{w}| = |w - iz|$, $\forall\, z, w \in C$.

III Si $z \neq 0$, $Arg(z) = 0$ entonces $z \in \mathbb{R}$.

A) VFV B) VVV C) FVV D) FFV E) FFF

PROBLEMA 4

Hallar el módulo de z, $z \neq 0$, si se sabe que $\dfrac{z}{36 + z^2}$ es un número real.

A) $\sqrt{6}$ B) 3 C) 6 D) 8 E) 36

PROBLEMA 5

Hallar $z \in C$ tal que $|z| + z = 2 + i$. Dar como resultado la parte imaginaria de z.

A) -1 B) 1 C) 2 D) -2 E) 3

PROBLEMA 6

Si $a < 0$ y $b > 0$. ¿En qué cuadrante está el número $(\overline{a - bi})(i)^{-4837}$

A) En el I cuadrante.
B) En el II cuadrante.
C) En el III cuadrante .
D) En el IV cuadrante.
E) En el II o III cuadrante.

PROBLEMA 7

Dado $w = -2 + 2\sqrt{3}\,i$, hallar la suma de todos los z tal que $2|z| = |w|$ y que la diferencia entre su amplitud y la de w sea $\pi/2$.

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

PROBLEMA 8

Hallar el valor de la expresión: $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-3} i$

A) $e^{-i3\pi/2}$ B) $e^{-i\pi/4}$ C) $e^{-i\pi/3}$ D) $e^{-i\pi/2}$ E) $e^{-i2\pi/3}$

PROBLEMA 9

Si w_0, w_1 y w_2 son números complejos. Probar por sustitución directa, que si $w_2 \neq 0$, entonces

$$z = \frac{-w_1 \pm \sqrt{w_1^2 - 4w_2w_0}}{2w_2}$$

es solución de la ecuación: $w_2z^2 + w_1z + w_0 = 0$.

PROBLEMA 10

La ecuación de segundo grado con coeficientes reales que admite como raíz al número $2-i\sqrt{3}$ es:

A) $x^2 - 4x + 7 = 0$ B) $x^2 - 4x + 1$ C) $x^2 + 4x - 1 = 0$
D) $x^2 + 4x + 1 = 0$ E) $x^2 + 4x + 7 = 0$

PROBLEMA 11

Sabiendo que $\sqrt{3}$ y $1-2i$ son raíces del polinomio $P(x) = x^5 - x^4 + 8x^2 - 9x - 15$, hallar las demás raíces.

A) {1, 2} B) {1} C) {−i, i} D) {1, i} E) $\{-\sqrt{3}, 1+2i, -1\}$

PROBLEMA 12

Hallar todas las raíces de: $(1+z)^5 = (1-z)^5$

A) $\dfrac{e^{i(2k\pi/2)}+1}{e^{i(2k\pi/2)}-1}$, k = 0, 1, 2, 3, 4

B) $\dfrac{e^{i(2k\pi/5)}+2}{e^{i(2k\pi/5)}-2}$, k = 0, 1, 2, 3, 4

C) $\dfrac{e^{i(2k\pi/5)}-1}{e^{i(2k\pi/5)}+1}$, k = 0, 1, 2, 3, 4

D) $\dfrac{e^{i(2k\pi/5)}-2}{e^{i(2k\pi/5)}+2}$, k = 0, 1, 2, 3, 4

E) $\dfrac{e^{i(2k\pi/5)}+1}{e^{i(2k\pi/5)}-2}$, k = 0, 1, 2, 3, 4

PROBLEMA 13

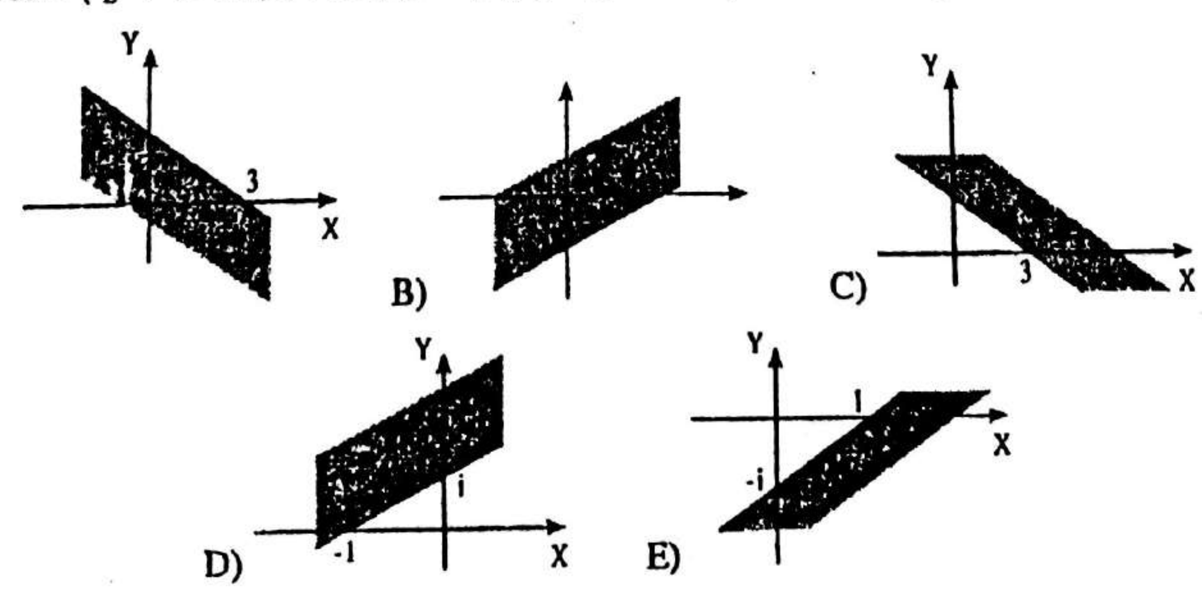
Determinar el total de números enteros positivos n, de 3 cifras que verifican la igualdad

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

A) 149 B) 150 C) 151 D) 152 E) 153

PROBLEMA 14

Sea $A = \{\overline{z} + 4i / \text{Im}(z) + \text{Re}(z) \leq 3\}$. ¿Qué gráfica representa al conjunto A?



7.10 TEST DE AUTOEVALUACION

PROBLEMA 1

Si $|\bar{z}\,i| = 8$ y $\text{Arg}(z(1+i)) = \pi/6$, hallar el número complejo z en la forma polar.

A) $8[\text{Cos}(-\pi/12) + i\ \text{Sen}(-\pi/2)]$

B) $2\sqrt{2}\ ([\text{Cos}(-\pi/12) + i\ \text{Sen}(-\pi/12)]$

C) $8[\text{Cos}(\pi/12) + i\ \text{Sen}(\pi/12)]$

D) $8[\text{Cos}(-\pi/12) - i\ \text{Sen}(-\pi/12)]$

E) $8[\text{Cos}(\pi/6) + i\ \text{Sen}(\pi/6)$

PROBLEMA 2

Decir el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I Sea $P(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$ entonces $P(|z|) = 0$, tiene muchas soluciones en C.

II Una raiz de $\sqrt{3+4i}$ es $-2-i$.

III Si z_1 y $z_2 \in$ C entonces $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_1) + 2k\pi$.

A) VVV B) FVV C) VFV D) FVF E) FFF

PROBLEMA 3

Determinar el valor de verdad de:

I Existe un $z \in$ C tal que $z^{-1} = -z$.

II Existe un $z \in$ C, $z \neq 0$, tal que $z^2 = -\bar{z}$.

III $\text{Re}(z\bar{w}) = \text{Re}(\bar{z}w)$, $\forall$ z, w $\in$ C.

A) VFF B) VFV C) VVV D) FFV E) VVF

PROBLEMA 4

Dado $w = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$, hallar un $z \in$ C tal que $|z + w| = |z| = 1$.

A) $(-1 \pm i\sqrt{3})w$ B) $(1 \pm i\sqrt{3})\bar{w}$ C) $\frac{(1 \pm i\sqrt{3})}{2}\bar{w}$ D) E) $\frac{(-1 \pm i\sqrt{3})}{3}\bar{w}$

PROBLEMA 5

Se da el siguiente conjunto

$$M = \{\bar{z} + 1 / |z + 1| \leq 1\},$$

Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I) $z = 1 + i \in M$

II) $z = \sqrt{2}\ e^{-\pi/2i} \notin M$

III) $z = i\ e^{\pi/2i} \in M$

A) VVV B) FVV C) VFF D) VFV E) FVF

PROBLEMA 6

El conjunto $\{z \in C / |z + 3| + |z - 3| = 8\}$ es igual al conjunto:

A) $\{(x,y) / x^2 + y^2 = 9\}$ B) $\{(x,y) / x^2 + y^2 = 3\}$ C) $\left\{(x,y) / \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$

D) $\left\{(x,y) / \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1\right\}$ E) $\left\{(x,y) / \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1\right\}$

PROBLEMA 7

El número complejo: $(\sqrt{3} - i)^n$, $n \in N$, es igual a:

A) $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}\right)$ B) $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right)$ C) $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)$

D) $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\right)$ E) $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)$

PROBLEMA 8

Hallar el coseno del ángulo que forman las gráficas de los números complejos siguientes:

$$z_1 = 2 + 4i; \quad z_2 = 4 + 2i$$

A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

PROBLEMA 9

Siendo z_1 y z_2 números complejos tales que $z_2^3 = z$, calcular:

$$E = \left\{1 - \frac{Re(z_1)}{Re^3(z_2)}\right\}\left\{1 + \frac{Im\, z_1}{Im^3(z_2)}\right\}$$

A) 1　　B) 5　　C) 9　　D) 13　　E) 16

PROBLEMA 10

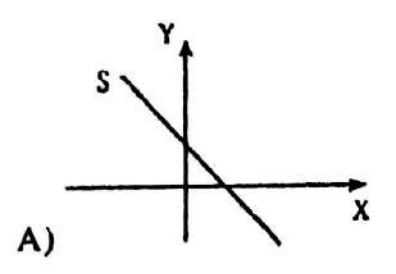
Si $z \in C$ y $|z - 1| = 1$ calcular:

$$\frac{Arg(z^2)}{Arg(z^2 - z)}$$

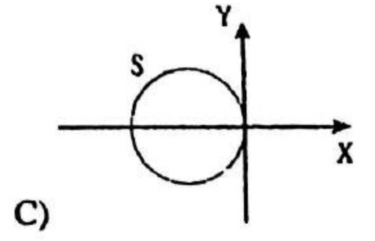
A) 2/3　　B) 1　　C) 3/2　　D) 2　　E) 3

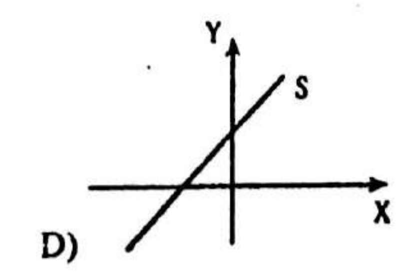
PROBLEMA 11

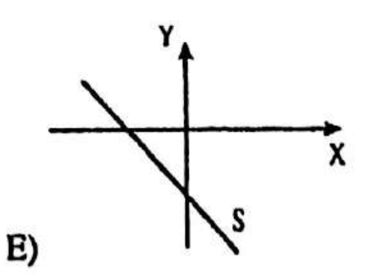
Si $z = x + yi$ ¿Qué gráfica representa a $S = \left\{z / Arg(\overline{z+2} - 1) = p/3\right\}$?

A)


B)
Y
S
X

C)


D)


E)


PROBLEMA 12

Sabiendo que $-\sqrt{3}$ y $1 + 2i$ son raíces del polinomio $p(x) = x^5 - x^4 + 8x^2 - 9x - 15$, hallar la suma de las demás raíces

A) 0　　B) $\sqrt{3} - 2i$　　C) $\sqrt{3} - i$　　D) $-\sqrt{3} + 2i$　　E) $i - \sqrt{3}$

7.11 CLAVE DE RESPUESTAS

Problemas propuestos:

1) D	6) A	11) E
2) A	7) C	12) A
3) C	8) A	13) B
4) C	10) A	14) D
5) B		

Test de autoevaluación

1) A	6) E	11) E
2) A	7) E	12) B
3) C	8) E	
4) D	9) C	
5) B	10) A	

CAPÍTULO 8

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES

8.0 OBJETIVOS

En este capítulo estudiaremos los sistemas de ecuaciones lineales y no lineales con dos o más variables.

Presentamos los métodos de solución para los sistemas lineales. En el caso de los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas hacemos la interpretación geométrica correspondiente. En el caso de los sistemas no lineales a través de ejemplos daremos pautas necesarias para la solución de estos sistemas. Esperamos que al final de este capítulo el alumno esté en condiciones de posteriormente poder profundizar en estos temas.

8.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.

Iniciamos esta sección presentando un ejemplo que muestra como ciertos problemas concretos pueden ser modelados utilizando un sistemas de ecuaciones lineales.

Consideramos el siguiente ejemplo:

Un teatro vende boletos a S/. 12.00 cada uno a personas mayores de edad y los niños reciben un descuento de S/. 3.00. En una noche el teatro tuvo un ingreso de S/. 5,700.00. Si x representa el número de boletos vendidos a S/. 12.00 e y representa a los vendidos con descuento, escriba una ecuación que relacione estas variables. Cada boleto sin descuento implica un ingreso de S/. 12.00 de modo que x boletos con descuento producen 9y soles, como el total obtenido es de S/. 5,700 debemos tener:

$$12x + 9y = 5,700$$

Si además tenemos como dato que se vendieron 1,300 boletos esa noche tendríamos otra ecuación que relaciona las variables x e y:

$$x + y = 1,300$$

Entonces las dos ecuaciones

$$12x + 9y = 5.700$$
$$x + y = 1,300$$

forman un sistema lineal de ecuaciones. Esto nos lleva a la siguiente definición:

DEFINICION 1

Un sistema de dos ecuaciones con dos variables es de la forma:

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y = b_1 \\ a_3 x + a_4 y = b_2 \end{cases}$$

donde x e y son dos variables distintas y a_1, a_2, a_3, a_4, b_1 y b_2 son constantes y al menos una de las constantes a_i es distinto de cero.

DEFINICION 2

Se denomina solución de un sistema al par ordenado de números (x_0, y_0) que satisfacen a cada ecuación del sistema.

EJEMPLO 1

$$3x + y = 8$$
$$x - \frac{y}{2} = 1$$

el par (x, y) = (2, 2) es solución del sistema.

Clasificación de los sistemas:

I. De acuerdo a las soluciones estas se clasifican en: compatibles e incompatibles.

a. **Compatibles.-** Son aquellos sistemas que tienen solución, estos a su vez pueden ser:

   i. **Determinadas.-** Si tiene una única solución.

   ii. **Indeterminado.-** Si el número de soluciones es infinito

EJEMPLO 2

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 7y = 8 \end{cases}$$

Tiene como solución a x = 1 e y = 1 entonces el sistema es compatible determinado.

EJEMPLO 3

$$x + 2y = 3 \quad ...(1)$$
$$2x + 4y = 6 \quad ...(2)$$

Es un sistema indeterminado porque si despejamos de (1) la variable x, tenemos:

$$x = 3 - 2y$$

reemplazando en (2) tenemos:

$$2(3 - 2y) + 4y = 6 \rightarrow 6 - 4y + 4y = 6 \rightarrow 6 = 6$$

o sea que se cumple para cualquier valor real de x e y.

a. **Incompatibles.-** Son aquellos sistemas que no tienen solución.

EJEMPLO 4

$$x + y = 4 \quad ...(1)$$
$$x + y = 2 \quad ...(2)$$

Es un sistema incompatible porque si resolvemos tenemos de la ecuación (1) $y = 4 - x$ reemplazando en (2) tenemos:

$$x + 4 - x = 2 \rightarrow 4 = 2 \therefore \text{el sistema no tiene soluciones.}$$

- **Sistemas Equivalentes:**

Dos o más sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

EJEMPLO 5

$$(1) \begin{cases} 7x - 3y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 4x + y = 6 \\ 9x - 4y = 1 \end{cases}$$

Los sistemas (1) y (2) son equivalentes porque la solución $x = 1$ e $y = 2$ satisface a los dos sistemas.

1. **Métodos de solución de un sistema lineal de ecuaciones**

a. **Método de sustitución:**

Procedimiento:

1. Elegir una de l as ecuaciones y despejar una de las variables en términos de la otra.
2. Sustituir el resultado en las demás ecuaciones.
3. Si se obtiene una ecuación con una variable hay que resolverla, en caso contrario se repite el procedimiento hasta que quede una sola ecuación con una variable.
4. Determinar los valores de las demás variables por sustitución regresiva.
5. Verificar la solución determinada.

EJEMPLO 6

Solución de un sistema de ecuaciones mediante sustitución.

Resolver: $\begin{cases} x + 3y = 5 & ...(1) \\ 2x + 2y = 6 & ...(2) \end{cases}$

Despejamos x de la primera ecuación por lo que tenemos $x = 5 - 3y$.

Sustituimos este resultado en la segunda ecuación y tenemos una ecuación con una sola variable.

$$2(5 - 3y) + 2y = 6$$
$$10 - 6y + 2y = 6$$
$$-4y = -4$$
$$y = 1$$

Con $y = 1$ mediante sustitución regresiva es decir sustituyendo 1 en vez de "y" en las ecuaciones originales. Tenemos el valor de x o sea: $2x + 2(1) = 6$ tenemos $2x = 4$ entonces $x = 2$

a. Método de igualación

Procedimiento:

1. De las dos ecuaciones del sistema se despeja la misma variable en función de la otra.
2. Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación resultante.
3. Determinar el valor de la otra variable por sustitución regresiva.
4. Verificar la solución determinada.

EJEMPLO 7

Solución de un sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$4x + 2y = 10 \quad ...(1)$$
$$3x + y = 7 \quad ...(2)$$

Despejamos la variable "y" de las ecuaciones (1) y (2).

De (1) $\qquad y = \dfrac{10 - 4x}{2} \quad ...(3)$

De (2) $\qquad y = 7 - 3x \quad ...(4)$

Igualando las ecuaciones (3) y (4) tenemos:

$$\frac{10 - 4x}{2} = 7 - 3x \text{ entonces } 10 - 4x = 14 - 6x$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

sustituyendo $x = 2$ en la ecuación (1) tenemos:

$$4(2) + 2y = 10 \quad \text{entonces} \quad 2y = 2 \rightarrow y = 1$$

la solución $x = 2$ e $y = 1$ si reemplazamos en el sistema tenemos:

$$4(2) + 2(1) = 10$$

$$3(2) + 1 = 7 \quad \text{se verifica.}$$

c. Método de eliminación o reducción

Procedimiento:

1. Dado el sistema, elegir una variable a eliminar.
2. Esta variable a eliminar debe tener el mismo coeficiente, de caso contrario multiplicar por números adecuados para obtener lo deseado.
3. Sumando o restando obtener una ecuación con una sola variable y resolver esta ecuación resultante.
4. Determinar el valor de la otra variable por sustitución regresiva.
5. Verificara la solución obtenida.

EJEMPLO 8

Resolver por el método de eliminación:

$$3x + 5y = 11 \qquad ...(1)$$

$$2x + 3y = 7 \qquad ...(2)$$

Eliminaremos la variable "y" para esto multiplicamos por "3" la ecuación (1) y por "+5" la ecuación (2) y tenemos:

$$9x + 15y = 33 \qquad ...(3)$$

$$10x + 15y = 35 \qquad ...(4)$$

restando (4) – (3) tenemos:

$$x = 2$$

sustituyendo $x = 2$ en la ecuación (1) tenemos:

$$3(2) + 5y = 11 \quad \text{entonces} \quad 5y = 5$$

$$y = 1$$

La solución $x = 2$ e $y = 1$ verifican las dos ecuaciones

2. Solución de un sistema lineal mediante determinantes

Este método se utiliza cuando el número de ecuaciones es igual al número de variables (en este caso dos). Este método es la regla de Cramer y se basa en el concepto de determinante.

Dado un sistema lineal con coeficientes literales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (b_1 \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Se requiere hallar su solución de la primera ecuación expresamos y por x.

$$y = \frac{c_1 - a_1.x}{b_1}$$

Este valor de y lo sustituimos en la segunda ecuación:

$$a_2.x + b_2\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2$$

Obtenemos una ecuación con una incógnita en "x" la que se reduce a la forma

$$(a_2 \,.\, b_1 - a_1b_2)x = b_1c_2 - b_2c_1 \qquad \ldots (1)$$

Si el coeficiente de x o sea $a_2b_1 - a_1b_2$ es distinto de cero, ambos miembros de (1) se pueden dividir por el, así tenemos

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \ldots (2)$$

Después de sustituir en la igualdad (1) x por su valor de la igualdad hallamos

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \ldots (3)$$

El sistema dado tiene una solución si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ además los valores de las incógnitas se calculan por las fórmulas (2) y (3).

Observamos que los denominadores de las fracciones que representan los valores de las incógnitas son iguales. Este común denominador es igual a $a_1b_2 - a_2b_1$; está compuesto solo de los coeficientes de las incógnitas x e y.

Escribimos estos coeficientes en el orden con que fueron dadas las ecuaciones del sistema, omitiendo las incógnitas y los disponemos en forma de tabla cuadrada; obtenemos:

$$\begin{matrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{matrix} \qquad \ldots (4)$$

Si se multiplican los coeficientes ubicados en las diagonales del cuadrado y del producto de los números dispuestos en la diagonal que va del ángulo superior izquierdo hacia el inferior derecho, se restó el producto de los números de la otra diagonal obtenemos la expresión $a_1b_2 - a_2b_1$; ésta se denomina determinante del sistema de ecuaciones lineales dado y se designa del siguiente modo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1.b_2 - a_2b_1 \qquad \ldots(5)$$

En general para la matriz del tipo (4) compuesta de cuatro números arbitrarios, la expresión (5) se denomina determinante de segundo orden.

Los numeradores de las funciones que determinan los valores de las incógnitas en las igualdades (2) y (3) también son determinantes de segundo orden:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

El determinante Δ_x se ha obtenido del determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

sustituyendo los números de la primera columna por los términos independientes y el determinante Δ_y se ha obtenido sustituyendo los números de la segunda columna por los términos independientes.

Entonces se puede escribir la solución del sistema:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

en la siguiente forma:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad e \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Teorema (Regla de Cramer para dos ecuaciones con dos variables)

La solución del sistema de ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

está dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

siempre que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

Es decir este teorema nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible determinado, esta condición es que el determinante del sistema sea diferente de cero.

EJEMPLO 9 todo de la determinante.

$$3x + 2y = 4$$
$$x - y = 1$$

tenemos que $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

entonces

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5} \rightarrow x = \frac{6}{5}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{-5} \rightarrow y = \frac{1}{5}$$

Nota: En el caso que $\Delta_S = 0$, entonces el sistema puede ser compatible y tiene infinitas soluciones o puede ser incompatible (no tener solución).

EJEMPLO 10

$$2x + y = 4 \quad ...(1)$$
$$6x + 3y = 12 \quad ...(2)$$

En este caso $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Si resolvemos tenemos de (1) $y = 4 - 2x$, reemplazando en (2) $6x + 3(4 - 2x) = 12 \rightarrow 6x + 12 - 6x = 12 \rightarrow 12 = 12$ tenemos que existen infinitas soluciones.

EJEMPLO 11

$$x + 3y = 5 \quad ...(1)$$
$$x + 3y = 1 \quad ...(2)$$

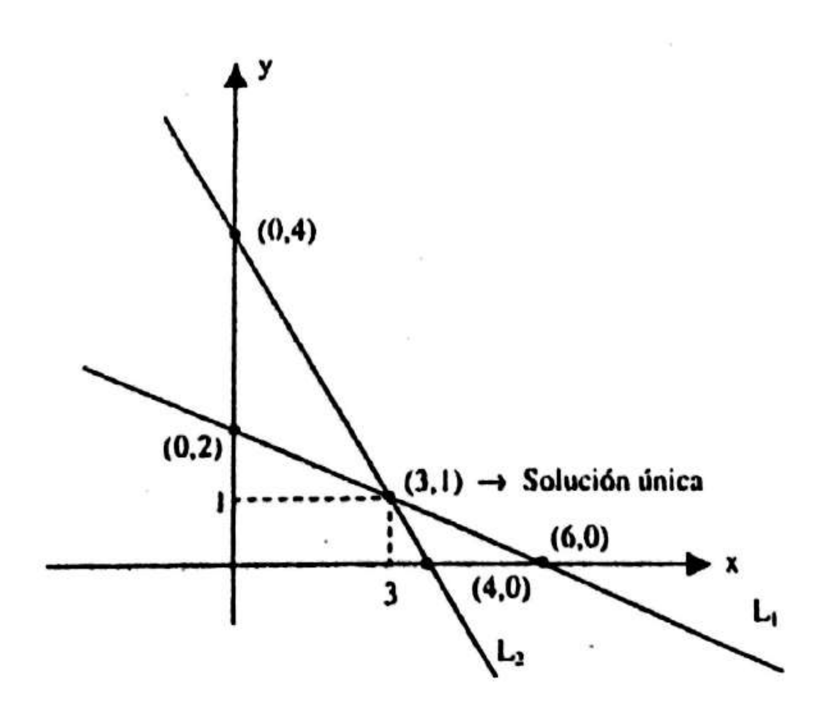
tenemos que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, también tenemos si resolvemos; de (1) $x = 5 - 3y$ reemplazando en (2): $5 - 3y + 3y = 1 \rightarrow 5 = 1$ (absurdo) entonces el sistema no tiene solución.

3. Interpretación geométrica

Sabemos que toda ecuación lineal de la forma $ax + by = c$ representa una recta en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, por lo tanto la interpretación geométrica de un sistema de 2 ecuaciones con 2 variables se reduce a interpretación algebraica de las posibles posiciones que adopten dos rectas en el plano y sabemos que dos rectas son secantes (si se intersectan en un solo punto) o paralelas (si no se intersectan) o coincidentes (se superponen). Veremos que cada una de estas posiciones relativas tiene una interpretación algebraica en términos del número de soluciones del sistema.

a. Si las rectas se cortan, el sistema de ecuaciones tiene una solución dada por el punto de intersección. En este caso el sistema es consistente y las ecuaciones son independientes.

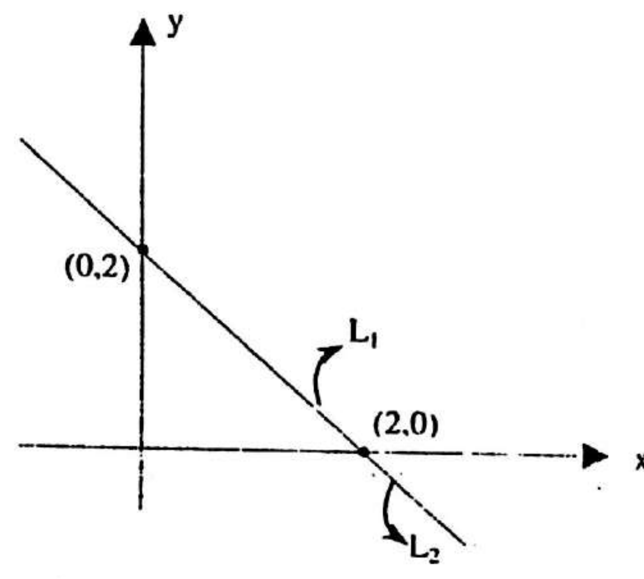
EJEMPLO 12 Resolver $\begin{cases} x + 3y = 6 \; ...L_1 \\ x + y = 4 \; ...L_2 \end{cases}$



b. Si las rectas son coincidentes el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones representada por todos los puntos sobre la recta, en este caso el sistema es consistente y las ecuaciones son dependientes.

EJEMPLO 13

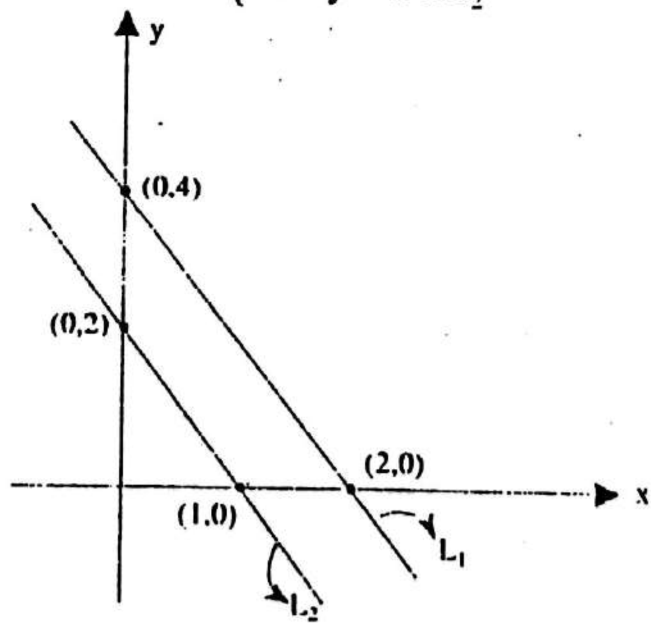
$$\text{Resolver}\begin{cases} x + \ \ y = 2 \ ...L_1 \\ 3x + 3y = 6 \ ...L_2 \end{cases}$$



c. Si las rectas son paralelas el sistema de ecuaciones no tiene solución ya que las rectas nunca se cortan, el sistema en este caso es inconsistente.

EJEMPLO 14

$$\text{Resolver}\begin{cases} 2x + y = 4 \ ...L_1 \\ 2x + y = 2 \ ...L_2 \end{cases}$$



Entonces dado el sistema:

$$(I)\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & ...(1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & ...(2) \end{cases}$$

Tenemos los siguientes casos:

i. El sistema (I) tiene solución única si

$$\Delta_S \neq 0 \quad ó \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

ii. El sistema (I) tiene infinitas soluciones:

$$\text{Si} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

i. El sistema (I) no tiene solución si:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

A continuación presentamos un cuadro comparativo entre el aspecto geométrico y algebraico.

EN GEOMETRÍA	EN ÁLGEBRA
Si las rectas se intersectan en un solo punto.	El sistema tiene solución única. El sistema es compatible
Si las rectas son coincidentes.	El sistema tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible.
Si las rectas son paralelas.	El sistema no tiene solución. El sistema es incompatible

8.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS.

Al igual que n sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables también tiene exactamente una solución, infinita soluciones o no tener solución.

Métodos de solución.-

Los métodos más usados para este tipo de sistemas es el algebraico y el método de las determinantes. Veamos como funciona el método de reducción en un sistema de tres ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 1

Utilizar el método de reducción para resolver el siguiente sistema:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x + y - z = -1 & \ldots(1) \\ 4x - 3y + 2z = 16 & \ldots(2) \\ 2x - 2y - 3z = 5 & \ldots(3) \end{cases}$$

Solución: Para un sistema de tres ecuaciones debemos eliminar una variable a la vez formando pares con las ecuaciones dadas.

Por ejemplo eliminamos la variable "z" de las ecuaciones (1) y (2), multiplicando la ecuación (1) por "2" tenemos:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -2x + 2y - 2z = -2 \\ \ \ 4x - 3y + 2z = 16 \end{cases} \quad \text{sumando tenemos} \\ \hline \ \ 6x - y \qquad = 14 \quad \ldots(4) \end{array}$$

Ahora eliminamos "z" de las ecuaciones (1) y (3) para esto multiplicamos la ecuación (1) por "3" y sumando tenemos:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -3x - 3y + 3z = 3 \\ \ \ 2x - 2y - 3z = 5 \end{cases} \\ \hline -x - 5y \qquad = 8 \quad \ldots(5) \end{array}$$

Por lo tanto tenemos:

$$(\alpha)\ \begin{cases} 6x - y = 14 \\ -x - 5y = 8 \end{cases}$$

resolviendo el sistema (α) tenemos:

$x = 2$ e $y = -2$, con estos valores hallamos z, reemplazando en la ecuación (1) tenemos

$2 - 2 - z = -1 \rightarrow \boxed{z = 1}$

La solución del sistema original es:

$$x = 2,\ y = -2,\ z = 1$$

Determinantes de orden tres

Para abordar el método determinantes para la solución de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, debemos indicar como se calcula un determinante de orden tres.

Un determinante de 3 x 3 se simboliza como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

donde $a_{11}, a_{12}, \ldots$, son números reales.

Una forma de calcular un determinante de orden tres, es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres variables.-

Consideremos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres variables:

$$(*)\ldots\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{22}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

se puede mostrar que si el determinante Δ_S de los coeficientes de las variables es distinto de cero, es decir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces la única solución del sistema (*) está dado por:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad y \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

donde: $$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{12} \\ a_{21} & c_2 & a_{22} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

A continuación presentamos un ejemplo de aplicación:

EJEMPLO 2

$x - 2y - 3z = 4$ ...(1)

$x - 2y - 4z = 3$ ...(2)

$2x + y - z = 3$ ...(3)

Solución:

Tenemos: $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Entonces el sistema tiene solución única, además tenemos:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

entonces los valores de x, y, z son dadas por

$$x = \frac{A_x}{A_5} = \frac{15}{5} = 3, \qquad y = \frac{A_y}{A_5} = \frac{-10}{5} = -2, \qquad z = \frac{A_z}{A_5} = \frac{5}{5} = 1$$

Nota: Si $\Delta = 0$ entonces el sistema puede ser inconsistente o indeterminado (tener infinitas soluciones)

8.3 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Un sistema no lineal es aquel sistema que no es lineal.

Para resolver un sistema no lineal de ecuaciones no existe un procedimiento general. Se puede eliminar variables, se puede sustituir y hasta puede graficar las ecuaciones para encontrar la solución, es decir sólo la experiencia le dirá a Ud. qué hacer.

Presentamos problemas resueltos para mostrarle algunos métodos que Ud. puede utilizar.

EJEMPLO 1

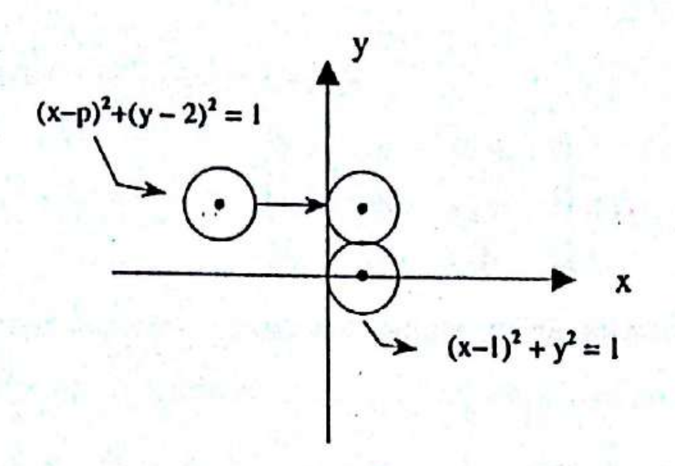
Calcular el valor de 'p' para que el siguiente sistema tenga solución única:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 & \quad ...(1) \\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 & \quad ...(2) \end{cases}$$

Solución:

De (1): $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (Circunferencia)

De (2): $(x-p)^2 + (y-2)^2 = 1$ (Circunferencia)



$(1)-(2)$: $\quad -2x+2px-p^2+4y-3=0 \rightarrow y=\dfrac{(3+2x)-(2px)-p^2}{4}$

$$\rightarrow y=\frac{2(1-p)x+p^2+3}{4} \text{ en } (1)$$

$$\rightarrow x^2-2x+\frac{(2(1-p)x+p^2+3)^2}{16}=0$$

$$16x^2-32x+4(1-p)^2x^2+4(1-p)(p^3+3)x+(p^2+3)^2=0$$

$$(16+4(1-p)^2)x^2+(4(1-p)(p^2+3)-32)x+(p^2+3)^2=0$$

Solución única: $\Delta=0 \rightarrow (4(1-p)(p^2+3)-32)^2-4(16+4(1-p)^2)(p^2+3)^2=0$

$$16(1-p)^2(p^2+3)^2-8 \text{ x } 32(1-p)(p^2+3)+32^2-64(p^2+3)^2-16(1-p)^2(p^2+3)^2=0$$

$$32^2=64 \text{ x } 4(1-p)(p^2+3)+64(p^2+3)^2$$

$$64 \text{ x } 16=16 \text{ x } 4(1-p)(p^2+3)+64(p^2+3)^2$$

$$16=(p^2+3)(4(1-p)+p^2+3)$$

$$16=(p^2+3)(p^2-4p+7)$$

$$p=1$$

Observación: Como se puede comprobar la forma gráfica es más adecuado en este tipo de problema.

EJEMPLO 2

Calcular el valor de 'a' para que el siguiente sistema tenga solución única:

$$\begin{cases} y=x^2+1 & \text{...(1)} \\ x^2+y^2=a & \text{..(2);} \quad a>0 \end{cases}$$

Solución: Sustitución

De (1) $y = x^2 + 1$

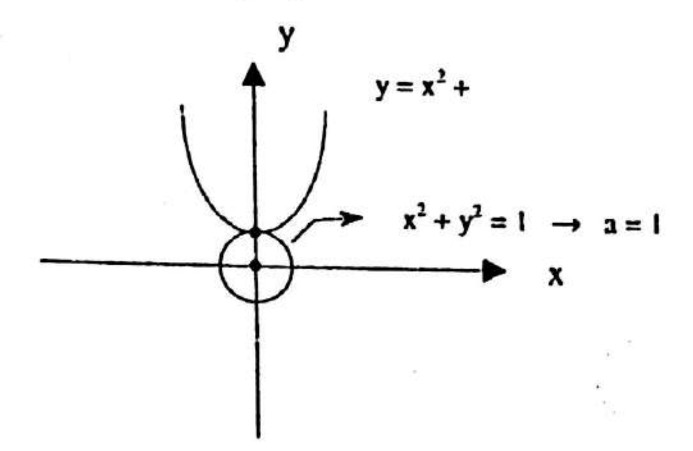
en (2) $x^2 + (x^2 + 1)^2 = a$

$\rightarrow$ $x^4 + 3x^2 + 1 - a = 0$

$$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(1-a)}}{2} \quad \text{(solución única)}$$

$\rightarrow x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1$

Gráficamente:



EJEMPLO 3

Halle una solución del sistema: $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 8 & \text{...(1)} \\ x^2 + y^2 = 353 & \text{...(2)} \end{cases}$

Hallar $\frac{x-1}{y}$.

Solución:

(1) al cuadrado: $2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 64$

de (2) $x + \sqrt{2x^2 - 353} = 32$

$$\sqrt{2x^2 - 353} = 32 - x$$

Elevando al cuadrado: $2x^2 - 353 = x^2 - 64x + 1024$

$$\rightarrow x^2 + 64x - 9 \times 9 \times 17 = 0 \rightarrow x = 17 \vee x = 81$$

$$\begin{matrix} x & -17 \\ x & 81 \end{matrix}$$

en (2): $\rightarrow y = \pm 8 \quad \therefore \frac{x-1}{y} = \frac{17-1}{\pm 8} = \pm 2$

EJEMPLO 4

Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 113 & ...(1) \\ x + xy + y = 43 & ...(2) \end{cases}$$

Calcular la suma de todos los posibles valores de $x + y$.

Solución:

De (1): $(x + y)^2 - xy = 113$ ...(3)

de (2): $xy = 43 - (x + y)$

en (3): $\rightarrow (x + y)^2 - 43 + (x + y) = 113$

$[(x + y) + 13][(x + y) - 12] = 0$

$\therefore \quad x + y = -13 \quad \vee \quad x + y = 12$

EJEMPLO 5

Resolver:

$$\begin{cases} xy + x + y = 7 & ...(1) \\ xz + x + z = 11 & ...(2) \\ yz + y + z = 5 & ...(3) \end{cases}$$

Solución:

De (1): $(x + 1)(y + 1) = 8$ ...(*)

de (2): $(x + 1)(z + 1) = 12$ ...(**)

de (3): $(y + 1)(z + 1) = 16$ ...(***)

Multiplicando las 3 ecuaciones:

$$(x + 1)^2(y + 1)^2(z + 1)^2 = 24^2$$

$$\rightarrow \quad (x + 1)(y + 1)(z + 1) = \pm 24 \quad ...(4)$$

(*) en (4): $8(z + 1) = \pm 24 \quad \rightarrow \quad z = 2 \ \vee \ z = -4$

(**) en (4): $12(y + 1) = \pm 24 \quad \rightarrow \quad y = 1 \ \vee \ y = -3$

(***) en (4): $6(x + 1) = \pm 24 \quad \rightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = -5$

EJEMPLO 6

Resolver:
$$\begin{cases} x(x+y+z)=48 & ...(1) \\ y(x+y+z)=12 & ...(2) \\ z(x+y+z)=84 & ...(3) \end{cases}$$

Determinar el menor valor de yz.

Solución:

De (1) y (2): $y=\dfrac{x}{4}$

De (1) y (3) $z=\dfrac{7}{4}x$

en (1): $x\left(x+\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{4}x\right)=48$

$\rightarrow x=\pm 4$ $\quad y=\pm 1$ $\quad z=\pm 7$

entonces: $yz=7$

8.4 SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES

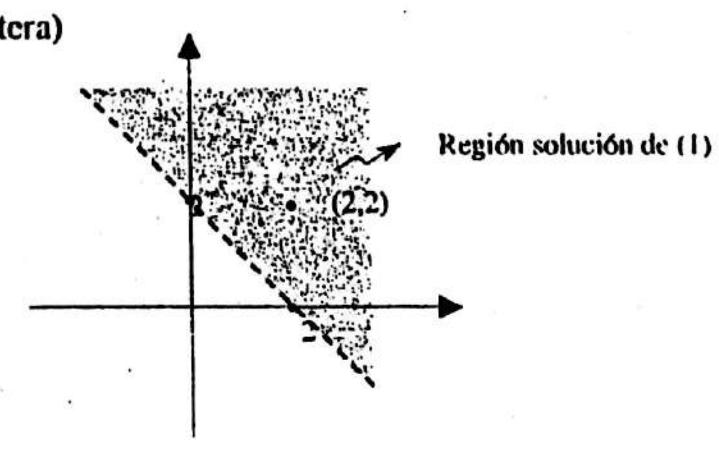
Analizaremos el caso de un sistema de inecuaciones en dos variables. Generalmente la solución se expresará en forma gráfica, pues los valores de 'x' e 'y' que satisfacen el sistema forman un conjunto de pares ordenados (a, b) cuya gráfica es una región. A continuación se mostrará los procedimientos más adecuados para hallar la solución del sistema a través de algunos ejemplos representativos.

EJEMPLO 1

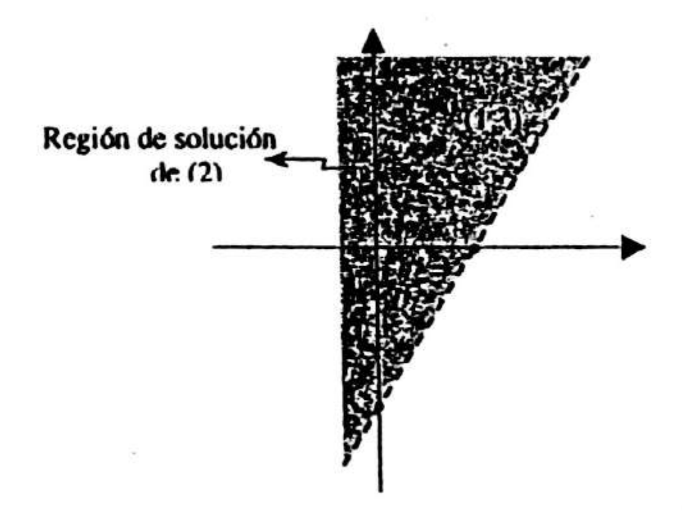
Resolver:
$$\begin{cases} x+y\geq 2 & ...(1) \\ 2x-y\leq 4 & ...(2) \end{cases}$$

Solución:

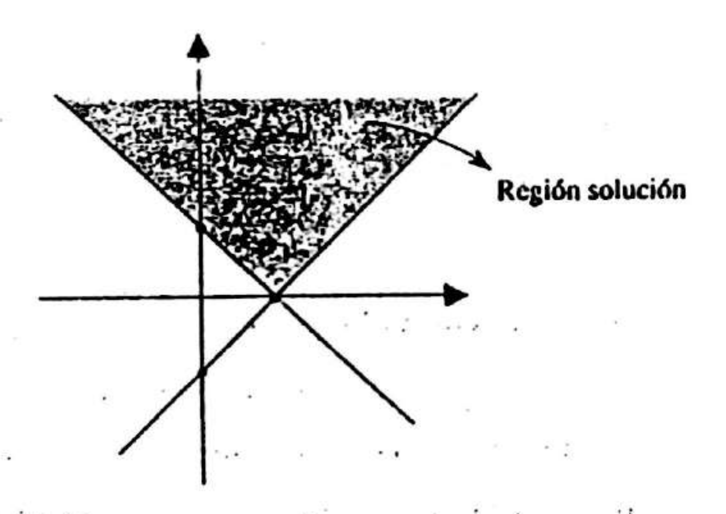
De (1) $\quad x+y=2$ (frontera)



De (2) $2x - y = 4$ (frontera)



Intersectando:



EJEMPLO 2

Resolver el sistema: $\begin{cases} \dfrac{x+50}{5} > \dfrac{x}{2} & ...(1) \\ (3-x)^3 + x^3 < 8 + (3x+1)^2 & ...(2) \\ (x+2)^2 > (x+1)^2 + 2 & ...(3) \end{cases}$

Solución:

De (1): $x < \dfrac{100}{3}$

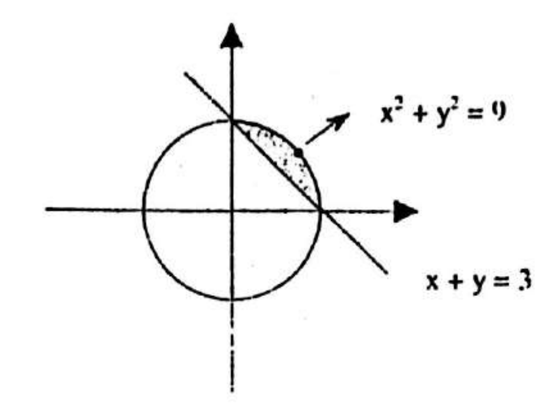
De (2): $x > 0$ $\Rightarrow$ $x \in \left\langle 0, \dfrac{100}{3} \right\rangle$

De (3): $x > -\dfrac{1}{2}$

EJEMPLO 3

Resolver $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$

Solución:



EJEMPLO 4

Resolver $\begin{cases} \log_2(x+2) < 2 & ...(1) \\ e^x > xe & ...(2) \end{cases}$

Solución:

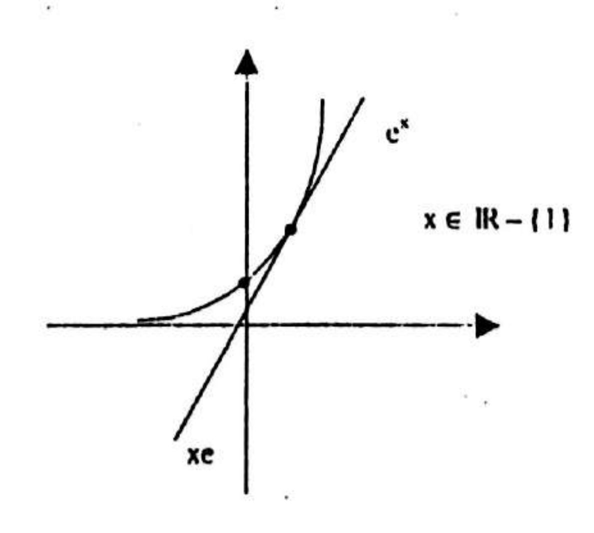
De (1): $x + 2 > 0 \rightarrow x > -2$

$\log_2(x+2) < \log_2 4 \rightarrow x + 2 < 4$

$\rightarrow x < 2$

$\therefore -2 < x < 2$

De (2):



$\therefore x \in \langle -2, 2 \rangle - \{1\}$

8.5 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Si $a \neq b \neq c$, hallar "z" en el siguiente sistema.

$$\begin{cases} a^2x + ay + z = a^3 & ...(1) \\ b^2x + by + z = b^3 & ...(2) \\ c^2x + cy + z = c^3 & ...(3) \end{cases}$$

Solución:

Multiplicando (1) por b^2 y (2) por a^2 tenemos:

$$\begin{cases} a^2.b^2.x + ab^2.y + b^2.z = a^3.b^2 & ...(4) \\ a^2.b^2.x + a^2.by + a^2.z = a^2.b^3 & ...(5) \end{cases}$$

restando (5) – (4) tenemos:

$$aby + (b+a)z = -a^2.b^2 \qquad ...(6)$$

luego (2) por c^2 y (3) por b^2 tenemos:

$$\begin{cases} b^2.c^2.x + bc^2.y + c^2.z = b^3.c^2 & ...(7) \\ b^2.c^2.x + b^2.cy + b^2.z = b^2.c^3 & ...(8) \end{cases}$$

restando (8) – (7) tenemos

$$bc.y + (c+b).z = -b^2.c^2 \qquad ...(9)$$

multiplicando (6) por "c" y (9) por "a" tenemos

$$\begin{cases} abcy + c(b + a)z = -a^2.b^2.c & ...(10) \\ abcy + a(c + b)z = -a^2.b^2.c & ...(11) \end{cases}$$

de (10) y (11) tenemos $z = abc$.

PROBLEMA 2

Dado el sistema:

$$3x + 2y = 10 \qquad ...(1)$$

$$x + 5y = 12 \qquad ...(2)$$

$$4x - y = 6 \qquad ...(3)$$

Podemos afirmar:

a. No tiene solución

b. Tiene solución única.

c. Tiene infinitas soluciones

d. Tiene 3 soluciones.

Solución:

Resolviendo (1) y (2) tenemos que $x = 2$ e $y = 2$, reemplazando en (3) se verifica la igualdad, por lo tanto el sistema tiene solución única.

PROBLEMA 3

Calcular "α" para que el sistema:

$$\begin{cases} (\alpha+1)x + 5y = 7 & \text{...(1)} \\ x + y = 8 & \text{...(2)} \\ 5x + (\alpha+1)y = 9 & \text{...(3)} \end{cases}$$

admita solución.

Solución:

Sumando la 1ra. y 3ra. ecuación se obtiene

$$(\alpha+6)x + (\alpha+6)y = 16 \rightarrow x + y = \frac{16}{\alpha+6} \qquad \text{...(*)}$$

PROBLEMA 4

Encontrar el intervalo de α para que el sistema.

$$2x - 5y = 1 \qquad \text{...(1)}$$

$$\alpha x + 10y = 4 \qquad \text{...(2)}$$

se satisfaga: $\forall x \in R^+$ y $\forall\, y \in R^-$

Solución:

Utilizando el método Cramer tenemos:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & 10 \end{vmatrix}} = \frac{30}{20+5\alpha} > 0 \qquad \text{...*}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_S} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & 10 \end{vmatrix}} = \frac{8-\alpha}{20+5\alpha} < 0 \qquad \text{...**}$$

de * y ** tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{30}{20+5\alpha} > 0 \\ \dfrac{8-\alpha}{20+5\alpha} < 0 \end{cases}$$

resolviendo tenemos $\alpha \in \langle 8, \infty \rangle$.

PROBLEMA 5

Dado el sistema
$$ax + y = 1$$
$$x - ay = 2$$

Podemos afirmar que:

A. $\exists a \in R^+/(I)$ es incompatible.

B. $\exists a \in R^-/(I)$ es incompatible.

C. $\exists a \in R^+/(I)$ es indeterminado (infinitas soluciones)

D. $\exists a \in R^- \cup \{0\}/(I)$ es indeterminado.

E. $\forall a \in R$: (I) tiene solución única.

Solución:

Del sistema tenemos $\Delta_S = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 1 \neq 0 \ \forall a \in R$ entonces el sistema (I) tiene solución única. Rpta. E.

PROBLEMA 6

Resolver el sistema:
$$3|x| + 4y = 0$$
$$x - |y - 1| = 5$$

ser como respuesta la suma de todos los valores de x, menos la suma de todos los valores de y, que son solución del sistema.

A) 20 B) 16 C) 40 D) 42 E) 28

Solución:

De (1) $y = -\frac{3}{4}|x|$ entonces $y < 0 \rightarrow y - 1 < 0$ luego $|y - 1| = -(y - 1)$.

De (2) $x = 5 + |y - 1| \rightarrow x > 0$ entonces $|x| = x$.

En el sistema tenemos:
$$3x + 4y = 0$$
$$x + y = 6$$

resolviendo tenemos $x = 24$ e $y = -18$.

$\therefore$ Rpta. $24 - (-18) = 42$.

PROBLEMA 7

El triple de la edad de Juan exceden 18 años al duplo de la edad de José. exactamente hace 10 años la suma de los cuadrados de ambas edades excedía en 111 años al producto de las mismas. Determinar la edad que tiene Juan.

A) 18 B) 23 C) 20 D) 26 E) 42

Solución:

Sea x: edad de Juan

y: edad de José

de los datos tenemos:

$$3x - 18 = 2y \quad ...(1)$$

$$(x-10)^2 + (y-10)^2 = (x-10)(y-10) \quad ...(2)$$

si hacemos el cambio:

$$a = x - 10 \rightarrow x = a + 10$$

$$b = y - 10 \rightarrow y = b + 10$$

reemplazando en (1) y (2):

$$3a - 8 = 2b \quad ...(3)$$

$$a^2 + b^2 = 111 + a.b \quad ...(4)$$

de (3): $b = \dfrac{3a-8}{2}$ en (4): $a^2 + \left(\dfrac{3a-8}{2}\right)^2 = 111 + a\left(\dfrac{3a-8}{2}\right)$

tenemos:

$$7a^2 - 32a - 380 = 0$$

resolviendo tenemos:

$$a_1 = -\frac{38}{7} \quad y \quad a_2 = 10$$

por lo tanto $a = 10 \rightarrow x = 20$ edad de Juan.

PROBLEMA 8

Calcular x en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{11} & ...(1) \\ 3x - 2y + 5z = 280 & ...(2) \end{cases}$$

A) 3 B) 18 C) 25 D) 31 E) 40

A) 3 B) 18 C) 25 D) 31 E) 40

Solución:

De (1) $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{11} = k \rightarrow x = 5k, \quad y = 7k, \quad z = 11k$

Reemplazando en (2) tenemos:

$k = 5$ y $x = 25$

PROBLEMA 9

Resolver:

$$\begin{cases} x + y = 2 & \text{...(1)} \\ y - x^2 - 1 = 0 & \text{...(2)} \end{cases}$$

Solución:

Método (1): Sustituyendo (1) en (2):

$y = 2 - x$ en (2): $2 - x - x^2 - 1 = 0$

$\rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Si $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow y = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

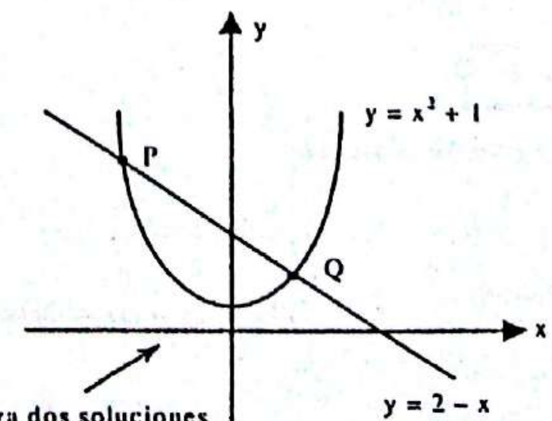
Si $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow y = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ Conjunto solución = $\left\{\left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

Método 2: Gráfico

$P = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$

$Q = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)$



PROBLEMA 10

Resolver:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & ...(1) \\ y - x^2 = 0 & ...(2) \end{cases}$$

Solución:

Eliminamos la variable 'x' sumando las ecuaciones:

(1) + (2): $$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

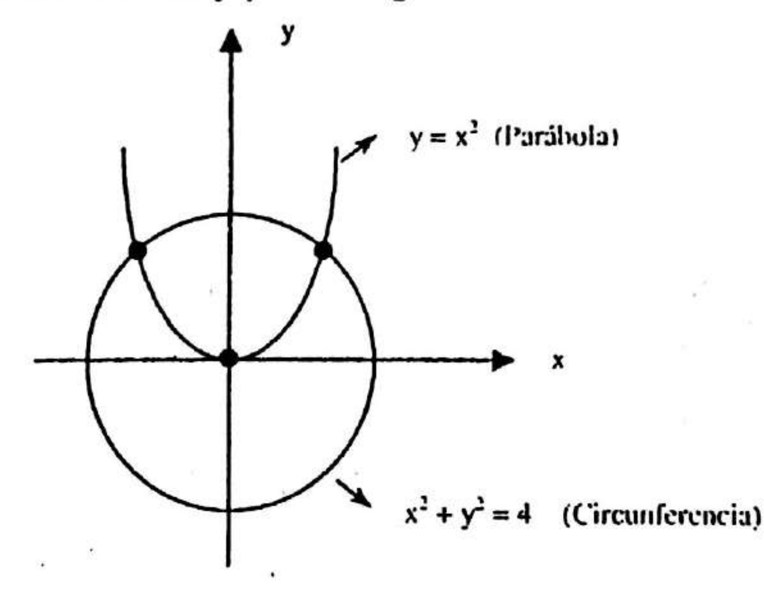
en (2): $$y = x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = x^2 \geq 0$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}$$

Observación: Se descarta el otro valor de 'y' pues es negativo.

Graficando:

Las gráficas se cortan en dos puntos



PROBLEMA 11

Resolver:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 11 & ...(1) \\ x + y = 73 & ...(2) \end{cases}$$

Solución:

(1) Al cuadrado:

$$\underbrace{x + y} + 2\sqrt{xy} = 121$$

$$73 + 2\sqrt{xy} = 121$$

$$\rightarrow \quad xy = 24^2$$

además: $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$

$73^2 - (x-y)^2 = 4 \times 24^2$

$\rightarrow (x-y)^2 = 25 \times 121$

$\rightarrow x-y=\pm 55 \quad ...(3)$

de (2): $x=\dfrac{73\pm 55}{2} \rightarrow x=9 \quad \vee \quad x=64$

$\therefore$ Si $x=9 \rightarrow y=64$

Si $x=64 \rightarrow y=9$

Conjunto solución = {(9,64); (64,9)}

PROBLEMA 12

Calcular xy a partir de:
$$\begin{cases} x+\sqrt{x+y}=32 & ...(1) \\ y+\sqrt{x+y}=1 & ...(2) \end{cases}$$

Solución:

(1) + (2): $\left(\sqrt{x+y}\right)^2 + 2\sqrt{(x+y)} + 1 = 64$

$\rightarrow \quad \sqrt{x+y}=7 \quad \rightarrow \quad x=25 \quad$ e $\quad y=24$

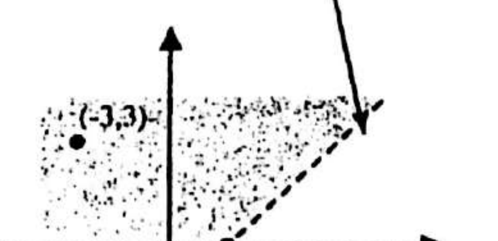
$\rightarrow \quad xy=600$

PROBLEMA 13

Resolver :
$$\begin{cases} x-y<1 & ...(1) \\ x+y>2 & ...(2) \end{cases}$$

Solución:

De (1) : $x-y=1$ (Frontera de la Región)

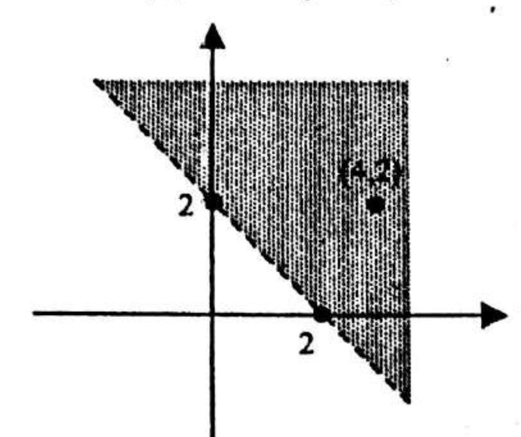


RECTA

$(-3)-(3)<1$

$\rightarrow$ **La región sombreada representa la solución de la inecuación (1)**

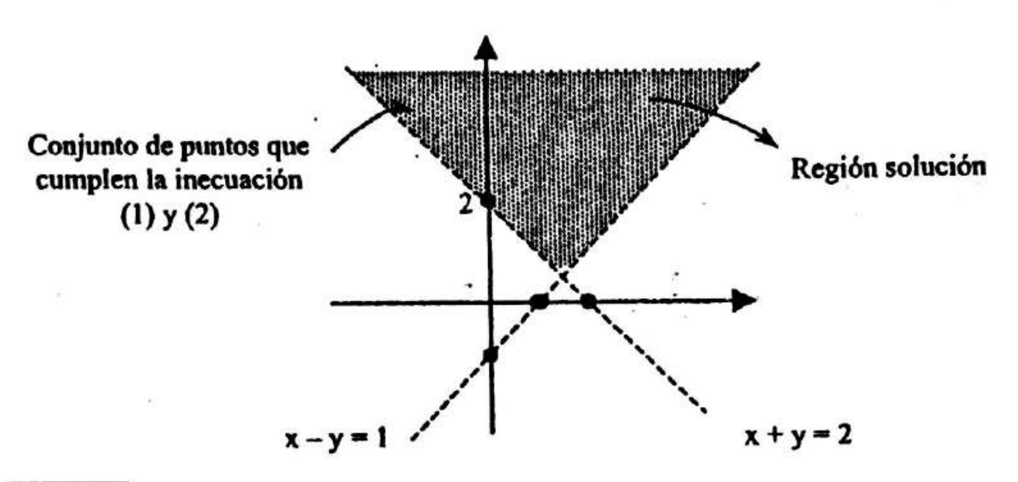
De (2) : $x + y = 2$ (Frontera de la Región)



RECTA

$(4) + (2) > 2$

→ La región sombreada representa la solución de la inecuación (2)

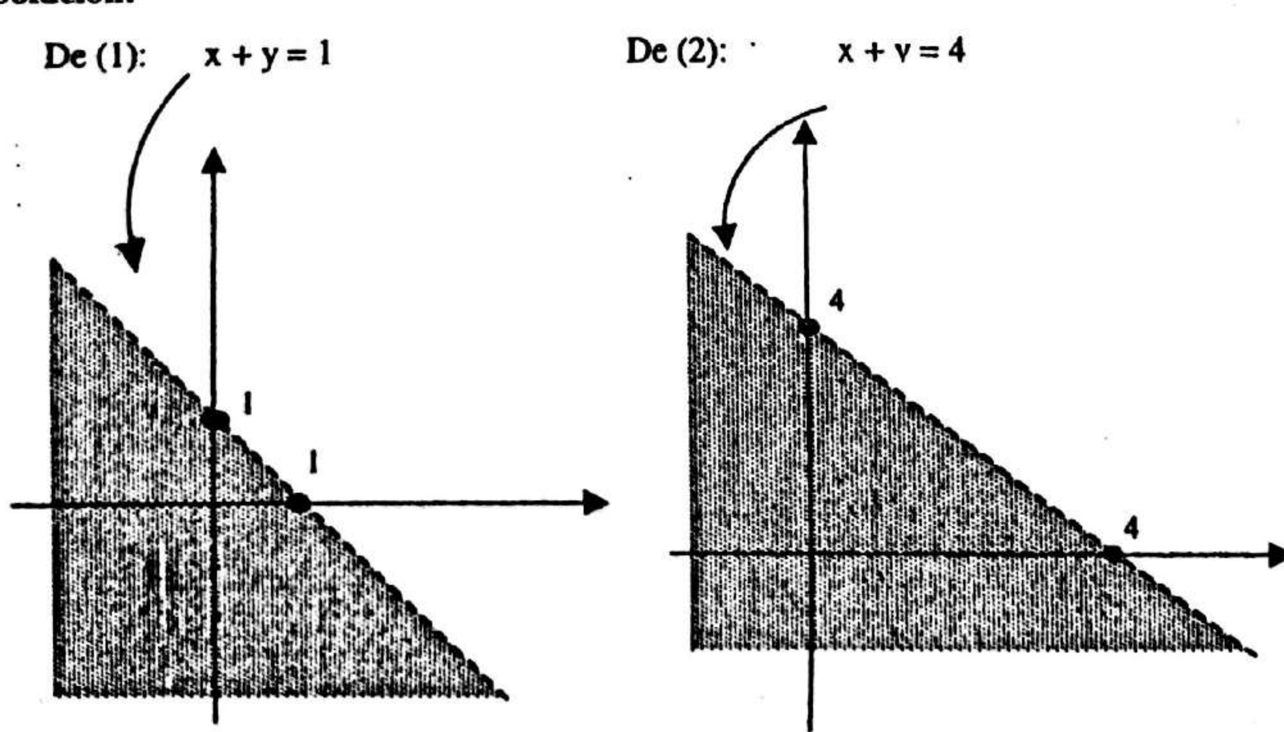


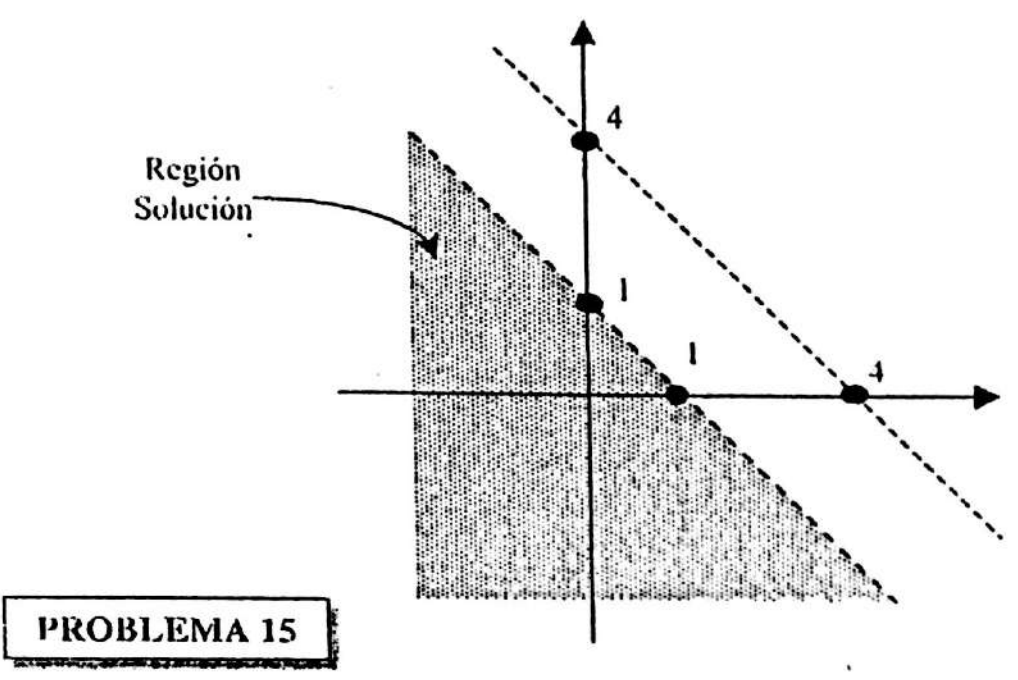
PROBLEMA 14

Resolver:
$$\begin{cases} x + y < 1 & ...(1) \\ x + y < 4 & ...(2) \end{cases}$$

Solución:

De (1): $x + y = 1$ De (2): $x + y = 4$



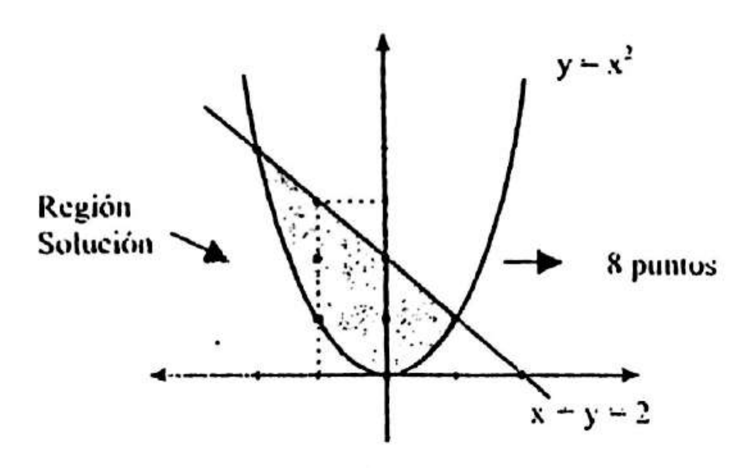


PROBLEMA 15

¿Cuántos puntos de coordenadas enteras tiene el conjunto solución del sistema?

$$\begin{cases} y \geq x^2 & ...(1) \\ x + y \leq 2 & ...(2) \end{cases}$$

Solución:



Entonces el sistema tiene ocho soluciones enteras.

8.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Calcular m para que el sistema:

$$m\,x + y = 1$$
$$x + y = 2$$
$$x - y = m \quad \text{sea compatible}$$

A) -1 B) 2 C) 0 D) 4 E) 3

PROBLEMA 2

Si el siguiente sistema:

$$(a-1)x+(b-1)y=c-1$$
$$(b+1)x+(c+1)y=a+1$$

es indeterminado, hallar el valor numérico de:

$$E=\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+bc}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) -1 E) 6

PROBLEMA 3

El sistema:

$$\begin{cases} ax+\ \ y=3 \\ 2x+ay=4 \\ 2ax-3y=1 \end{cases}$$

Tiene solución única, dar el valor de "a".

A) 1 B) −1 C) 2 D) −2 E) 3

PROBLEMA 4

¿Qué valor deber tener "a" para que x sea igual a "y" en el siguiente sistema?

$$ax+4y=119$$
$$5x-ay=34$$

A) 1 B) −1 C) 5 D) −5 E) 3

PROBLEMA 5

Hace 2 años tenía 6 veces tu edad actual y dentro de 5 años tendré 25 veces la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tu tendrías dentro de 15 años ¿Qué edad tengo?

A) 12 B) 20 C) 32 D) 14 E) 24

PROBLEMA 6

Calcular "m" si el sistema: $\begin{cases} (1-m)x+y+z=0 \\ 2x-my-2z=0 \\ x-y-(1-m)z=0 \end{cases}$ es indeterminado.

A) 0 B) 2 C) −2 D) 0 y −2 E)

PROBLEMA 7

Dado el sistema:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b$$
$$2x_1 + ax_2 - x_3 = 1$$
$$5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = b$$

Qué valor debe tomar "a" para que la solución del sistema sea única y además $x_1 = 4$ y $A_{x1} = 56$.

A) 0   B) 5   C) –1   D) 3   E) 5

PROBLEMA 8

Dado el sistema:

$$2x - 3y + 4z = 6 \quad ...(1)$$
$$5x + 2y + 3z = 7 \quad ...(2)$$
$$19x + 17z = 33 \quad ...(3)$$

podemos afirmar que:

A) Tiene solución única
B) Tiene infinitas soluciones
C) Tiene 2 soluciones
D) Tiene 3 soluciones
E) No tiene solución

PROBLEMA 9

Hallar la relación entre 'a' y 'b' para que el siguiente sistema tenga 2 soluciones:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{x}, & a > 0 \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

A) a = b   B) a = 2b   C) 2a = b   D) 3a = b   E) a = 2b

PROBLEMA 10

Resolver $\begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = 36 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$. Calcular $E = \sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}$

A) $\sqrt{5}/3$ B) $\sqrt{5}/2$ C) $\sqrt{5}/4$ D) $\sqrt{5}/6$ E) $\sqrt{5}/5$

PROBLEMA 11

Resolver: $\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 8x \\ 4x = x^2 - y \end{cases}$ y dar la suma de los valores que toma y.

A) -5 B) -3 C) 0 D) 4 E) 7

PROBLEMA 12

Sea el sistema $\begin{cases} \text{Log}_{1/2}(x+y) - \text{Log}_2 y = -2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

Hallar $x - y$, si $x, y \in Z$.

A) -7 B) -3 C) 0 D) 3 E) 7

PROBLEMA 13

Resolver : $\begin{cases} e^{x+2} < 1 \\ e^{-x} > -xe \end{cases}$

A) $x \in \langle -\infty, -2 \rangle$ B) $x \in \langle -\infty, -2 \rangle - \{-1\}$ C) $x \in \varnothing$

D) $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ E) $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$

PROBLEMA 14

Si al doble de la edad de cierta persona se le resta 17 años, resulta menor que 35, pero si a la mitad de la edad se le suma 3 el resultado es mayor que 15 ¿cuál es dicha edad?.

A) 10 años B) 15 años C) 20 años D) 25 años E) 30 años

PROBLEMA 15

¿Cuántas soluciones enteras tiene el sistema?

$$\begin{cases} |x| \le |y| \\ |x| + |y| \le 3 \end{cases}$$

A) 7 B) 8 C) 15 D) 16 E) 24

8.7 AUTOEVALUACION

PROBLEMA 1

Qué valor debe asignarse a "α" para que el sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ \alpha x + y = 2 \\ x + \alpha . y = 3 \end{cases}$ tenga solución.

A) 1 B) 2 C) 1/2 D) $-1/2$ E) 3

PROBLEMA 2

Para qué valor de λ el sistema:

$$\lambda x + y = 0$$
$$\lambda y + z = 1$$
$$x + \lambda z = \lambda$$

admite infinitas soluciones.

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3/2

PROBLEMA 3

El triple de la edad de Rolando excede en 18 años al duplo de la edad de Julio, exactamente hace 10 años, la suma de los cuadrados de ambas edades excedía en 111 años al producto de los mismos. Determinar la edad de Rolando.

A) 18 B) 22 C) 34 D) 20 E) 16

PROBLEMA 4

Dado el sistema:

$$2x - 3y + 4z = 6$$
$$5x + 2y + 3z = 7$$
$$19x + 17z = 33$$

podemos afirmar.

A) Tiene solución única
B) Tiene infinitas soluciones
C) No tiene solución
D) Tiene 3 soluciones
E) Tiene 2 soluciones

PROBLEMA 5

Dividir 45 en cuatro partes de tal modo que añadiendo 2 al primero, restando 2 del segundo y multiplicando el tercero por 2 y dividiendo el cuarto entre 2 nos da el mismo resultado. La división de la parte mayor entre la parte menor es:

A) 3 B) 7/2 C) 4 D) 5 E) 9

PROBLEMA 6

¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema?

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^3 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA 7

¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

PROBLEMA 8

¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema?

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = |x| \end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

PROBLEMA 9

¿Cuántas soluciones enteras tiene el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x \geq 0, \; y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA 10

Hallar el área de la región:

$$\begin{cases} x \leq 0, \; y \leq 0 \\ x + y \geq -2 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5/2 E) 7/2

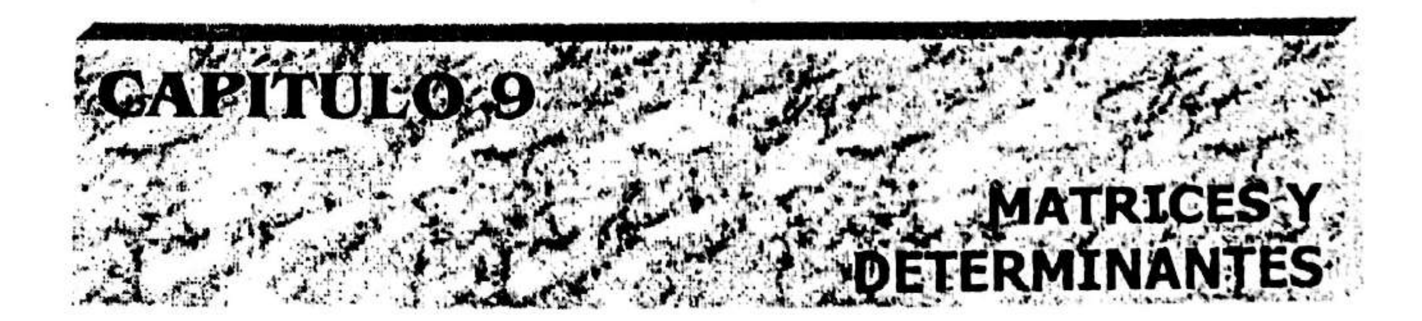
8.8 CLAVE DE RESPUESTAS

Problemas propuestos

(1) C	(2) C	(3) C	(4) C	(5) B	(6) B
(7) D	(8) B	(9) C	(10) C	(11) B	(12) A
(13) A	(14) D	(15) C			

Test de autoevaluación

1) B	6) B
2) A	7) A
3) B	8) C
4) C	9) C
5) A	10) B



9.0 OBJETIVOS

El objetivo de este capítulo de este capítulo es presentar la teoría básica de las matrices y determinantes, de manera que el alumno pueda posteriormente profundizar estos temas sin mayor complicación cuando así lo requiera.

9.1 MATRICES: DEFINICIÓN, NOTACIÓN Y ORDEN

DEFINICIÓN 1

Una matriz es un arreglo rectangular de escalares (números reales o complejos) ordenados en filas y columnas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

El arreglo anterior tiene m filas (se cuentan de arriba hacia abajo) y n columnas (se cuentan de izquierda a derecha), y se dice que es de orden (o tamaño) $m \times n$. Los escalares se denominan elementos de la matriz.

EJEMPLO 1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2 x 3

$B = \begin{bmatrix} 3 & \pi \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2 x 2

$C = [4]$ es de orden 1 x 1

El siguiente arreglo $\begin{bmatrix} & 3 & \\ 4 & & 5 \end{bmatrix}$ no es una matriz, no es un arreglo rectangular.

Notación:

Las matrices usualmente se denotan por las letras mayúsculas A, B, C, . . . y los elementos por las letras minúsculas a, b, c, ... La forma (1) se puede expresar por un elemento genérico

$$A = [a_{ij}]_{mxn}$$

el elemento a_{ij} está en la fila i y columna j de A.

EJEMPLO 2 Formar la matriz $A = [a_{ij}]_{3x3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & i \geq j \\ i+j & i < j \end{cases}$

tenemos que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Nota: Los elementos a_{ij} de una matriz no necesariamente tienen que ser números (reales complejos) pueden ser también parámetros, funciones, etc. Como por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2x & x+3 & e^{2x} \end{bmatrix}$.

Igualdad de Matrices

Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y los elementos correspondientes son iguales. O sea $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

9.2 ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

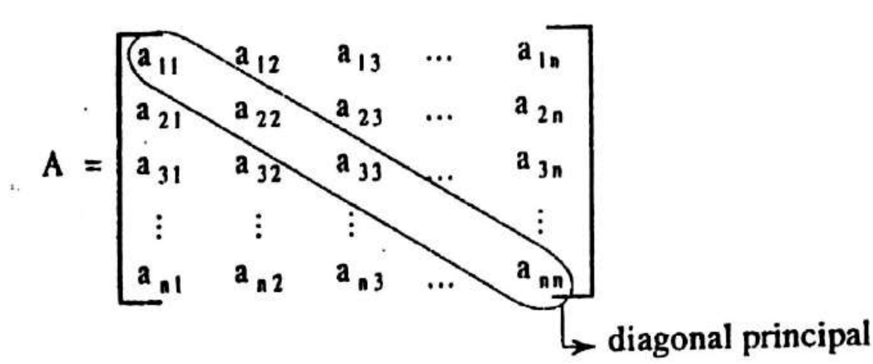
Empecemos definiendo algunos tipos de matrices para posteriormente estudiar las propiedades de cada una de ellos.

1. **Matriz cuadrada:** Es aquella donde el número de filas es igual al número de columnas.

EJEMPLO 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3

Para una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{nxn}$ los elementos situados en la posición a_{ii} forman la diagonal principal de A



2. **Matriz rectangular:** Es aquella que no es cuadrada, es decir, cuyo número de filas es distinto del número de columnas.

3. **Matriz fila:** Se llama así a la matriz que sólo tienen una fila.

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

4. **Matriz columna:** Se llama así a la matriz que sólo tiene una columna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

5. **Matriz nula:** Es una matriz cuyos elementos son todos iguales a cero.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4 $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz nula de orden 2 x 3.

6. **Matriz identidad:** Es una matriz cuadrada de orden n denotada por I ó I_n cuyos elementos de su diagonal principal son todos iguales a uno y los elementos fuera de la diagonal principal son todos iguales a cero.

$$I = I_n = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad \text{donde} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

es decir:

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 5 $I = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz identidad de orden 2.

7. **Matriz diagonal:** Es una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos para $i, j = 1, 2, \ldots, n$ son

$$a_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Así pues, esta matriz que se denota por D es

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 6 $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal de orden 3.

8. **Matriz escalar:** Es aquella matriz diagonal cuyos elementos situados en la diagonal principal son iguales.

Así pues, la matriz es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 7

$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz escalar de orden 3.

9. **Matrices triangulares:** Sea $A = [a_{ij}]_{nxn}$ una matriz cuadrada de orden n.

a) Se dicé que A es triangular superior en todos los elementos de A situados debajo de su diagonal principal son nulos, es decir,

$$a_{ij} = 0, \quad i > j, \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n$$

b) Se dice que A es triangular inferior si todos los elementos de A situados por encima de su diagonal principal son nulos, es decir,

$$a_{ij} = 0, \quad i < j, \ \forall i, j = 1, \ldots, n$$

EJEMPLO 8

La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ es triangular superior y $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ es triangular inferior.

10. **Matriz traspuesta:** Sea $A = [a_{ij}]_{mxn}$ una matriz de orden m x n. La traspuesta de la matriz A, denotado por A^T se define de la siguiente manera: Las filas A^T son las columnas de A y las columnas de A^T son las filas de A.

EJEMPLO 9

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ entonces $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$.

En general si $A = [a_{ij}]_{mxn}$ entonces $A^T = [a_{ji}]_{nxm}$.

11. **Matriz Simétrica:** Se dice que una matriz cuadrada A de orden n, es simétrica si para cada i = 1, . . . , n la fila y columna i-ésima de A son iguales. es decir

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad i,j = 1, \ldots, n$$

12. **Matriz antisimétrica:** Se dice que una matriz cuadrada A de orden n, es antisimétrica, cuando para todo i,j = 1, . . . , n se verifica que $a_{ij} = -a_{ji}$.

EJEMPLO 10 Las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \ \text{y} \ B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

son respectivamente, simétrica y antisimétrica.

Observación:

a) Todas las matrices diagonales son triangulares tanto superior como inferiormente. Por otra parte, para que una matriz sea a la vez triangular superior e inferior es preciso que sea diagonal. En particular las matrices identidad y nula (de orden n) son diagonales. Además, toda matriz diagonal es simétrica.

b) De acuerdo con la definición de matriz antisimétrica, es claro que los elementos de la diagonal principal de una matriz de este tipo son iguales a cero. En particular, la única matriz diagonal antisimétrica es la matriz nula.

c) La matriz identidad es diagonal y simétrica.

9.3 OPERACIONES MATRICIALES: SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN Y PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

La utilidad de las matrices es que con ellas se puede definir operaciones que nos dan otras matrices.

1. **Multiplicación por un escalar:** Dados una matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ y un escalar k, el producto de k y A es la matriz.

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

donde cada elemento de A se multiplica por el escalar k entonces el resultado es la matriz k A del mismo orden que A.

EJEMPLO 1

$$k = 3,\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix};\quad 3A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 15 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

$$k = -4,\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 4 & 5 \\ -7 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};\quad -4A = \begin{bmatrix} 4 & -32 \\ -16 & -20 \\ 28 & -2 \end{bmatrix}$$

2. **Adición de matrices:** Si A y B tienen tamaño, entonces la suma de ellos, A + B, es la matriz obtenida al sumar los correspondientes elementos de las matrices.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}$$

EJEMPLO 2

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -8 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 17 \\ -8 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

La adición no es posible en las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

pues no son del mismo tamaño.

La sustracción se define con las operaciones anteriores:

Si A y B son del mismo tamaño

$$A - B = A + (-1)B$$

o sea,

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{mxn}$$

Sea M(m,n) el conjunto de matrices

$$M(m,n) = \{A \,/\, A = [a_{ij}]_{mxn}\}$$

Si A, B y C pertenecen a M(m,n) y k, $l \in \mathbb{R}$ (o C) entonces:

A_1.- A + B pertenece a M(m,n)

A_2.- A + B = B + A

A_3.- (A + B) + C = A + (B + C)

A_4.- Existe una única matriz 0 (matriz nula) en M(m,n) tal que A+0=A para cada A.

A_5.- Para cada matriz A existe una matriz –A tal que A + (-A) = 0

M_1.- kA pertenece a M(m,n)

M_2.- 1A = A

M_3.- (k + l)A = k A + lA

M_4.- k(A + B) = k A + k B

M_5.- k(l A) = (k l)A

3. **Multiplicación de matrices.-** Si $A = [a_{ij}]_{mxn}$, de orden mxn y $B = [b_{ij}]_{nxr}$, de orden mxn, el producto de A y B es una matriz $C = [c_{ij}]_{mxr}$, de orden mxr, donde el elemento c_{ij} es el producto escalar de i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B.

Así:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mr} \end{bmatrix} = C$$

donde $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} + , \ldots, + a_{in}\, b_{nj}$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

EJEMPLO 3

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3x3}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 4(1) - 3(6) + 5(3) & 4(4) - 3(5) + 5(2) \\ 1(1) + 6(6) + 8(3) & 1(4) + 6(5) + 8(2) \\ 4(1) + 3(6) + 2(3) & 4(4) + 3(5) + 2(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 61 & 50 \\ 28 & 35 \end{bmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que exista el producto de A y B; es que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B.

Propiedades del producto de matrices

1. $(A\,B)C = A(B\,C)$, propiedad asociativa
2. $A(B + C) = AB + AC$,
   $(A + B)C = AB + BC$, propiedades distributiva
3. $A(k\,B) = k\,A\,B$, k escalar
4. Para toda $A \in M(m,n)$, $I_m A = A$, $A\, I_n = A$
5. El producto de cualquier matriz A por una matriz nula 0 de orden adecuado es una matriz nula.
6. El producto de matrices no es en general conmutativo, si A y B son tales que:
   i) $AB = BA \Rightarrow$ A y B se dicen conmutativas.
   ii) $AB = -BA \Rightarrow$ A y B se dicen anticonmutativas.

EJEMPLO 4 (No conmutatividad del producto)

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 52 \\ 25 & 38 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 80 \\ 17 & 28 \end{bmatrix}$$

7. No se tiene, en general, la propiedad de cancelación para el producto de matrices. O sea; si $AB = AC$ entonces no necesariamente $B = C$.

EJEMPLO 5

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sin embargo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Se cumple $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ pero $A \neq 0$ y $B \neq 0$.

Potencia de una matriz de orden nxn: se define $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A = AA^2$ ..... $A^p = A^{p-1}A$.

Si p y q son enteros no negativos y A es una matriz de orden nxn:

$$A^pA^q = A^{p+q} \text{ y } (A^p)^q = A^{pq}$$

Si $AB = BA$ entonces $(AB)^p = A^pB^p$ y $A^pB^q = B^qA^p$

A menudo es útil conocer lo siguiente:

DEFINICIÓN 2

Sea A una matriz cuadrada de orden n

i) La matriz A es idempotente si $A^2 = A \cdot A = A$

ii) La matriz A es involutiva si $A^2 = I_n$

EJEMPLO 6 Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

es fácil comprobar que A es idempotente y B es involutiva.

Traza de una matriz

DEFINICIÓN 3

Dada una matriz A de orden n, se define la traza de A, que se denota por Tr(A) como el valor de la suma de todos los elementos de la diagonal principal de A, es decir,

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

EJEMPLO 7 Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por la definición anterior se tiene que

$$Tr(A) = 1 + 3 + (-2) = 2 \quad y \quad Tr(B) = 1 + 1 = 2$$

Es claro que para cada una de ellas su traza es única, aunque las matrices diferentes pueden tener igual traza, tal como ocurre con A y B. Las principales propiedades de la traza son las siguientes.

Propiedad 1:

i) Sean A, B dos matrices cuadradas de orden n, y $\alpha \in R$ entonces

$$Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$$

$$Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$$

ii) Sean A y B matrices de ordenes mxn y nxm, respectivamente, entonces

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

iii) Si I_n es la matriz identidad de orden n $Tr(I_n) = n$.

Presentamos ahora la forma como se comporta la operación de trasposición de matriz con respecto a las operaciones matriciales.

Propiedad 2: Sean A y B matrices cuadradas de orden n y $\alpha \in R$ (o C) se verifica que:

i) $(A + B)^T = A^T + B^T$ y $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

ii) $(A B)^T = B^T A^T$

iii) $(A^T)^T = A$

iv) $Tr(A) = Tr(A^T)$.

Propiedad 3: Sea A una matriz cuadrada de orden n, se verifica

i) A es simétrica si y sólo si $A = A^T$

ii) A es antisimétrica si y sólo si $A = -A^T$

La siguiente propiedad establece que toda matriz cuadrada se puede descomponer de modo único como la suma de una matriz simétrica y antisimétrica.

Propiedad 4: Dada una matriz cualquiera A cuadrada de orden n, únicamente existe una matriz simétrica S y una antisimétrica B, ambas de orden n tales que

$$A = S + B$$

Donde

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

$$B = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

9.4 MATRIZ INVERSA

Podemos comenzar planteándonos el siguiente problema: Hallar el inverso multiplicativo, si existe, para una matriz cuadrada dada.

DEFINICIÓN 4

Una matriz A de orden n se denomina invertible o no singular si existe una matriz Q de orden n tal que:

$$AQ = QA = I_n$$

La matriz Q se denomina la inversa de A.

Notación $A^{-1} = Q$

EJEMPLO 1 Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ y sea $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ como $AQ = QA = I_2$ entonces $A^{-1} = Q$

Se puede notar que la definición es simétrica, o sea si para Q existe una matriz A tal que

$$QA = AQ = I_n \text{ entonces } Q^{-1} = A$$

El siguiente ejemplo nos muestra que hay matrices cuadradas que no tienen inversa.

EJEMPLO 2

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, hallar A^{-1};

Suponiendo que: $$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

Entonces debe cumplir: $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots (x)$$

ó $$\begin{bmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces $a = 1$ y $2a = 0$ lo cual no es posible.

De aquí los valores a, b, c, d que satisfacen (x) no existen, y por lo tanto la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no tiene inversa.

DEFINICIÓN 5

Una matriz cuadrada que no tiene inversa se denomina matriz singular o no invertible.

Propiedad 5: La inversa de una matriz, si existe, es única.

Demostración: Consideremos que Q y A son inversas de A.

Entonces $AQ = QA = I_n$ y $AP = PA = I_n$.

Ahora tenemos: $P = P\,I_n = P(AQ) = (PA)Q = I_n\,Q = Q$

$\therefore P = Q$ La inversa es única.

Propiedad 6: Si A y B son matrices no singulares, del mismo orden n, entonces AB es no singular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración: Sea $(A\,B)(B^{-1}\,A^{-1}) = A(B\,B^{-1})A^{-1} = (A\,I_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$, análogamente $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\,I_n\,B = B^{-1}B = I_n$; por lo tanto AB es no singular o invertible.

Como la inversa es única:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Corolario 1: Si $A_1, A_2, \ldots, A_s$ son matrices no singulares (invertibles) de orden n, entonces $A_1A_2 \ldots A_s$ es no singular y $(A_1A_2 \ldots A_s)^{-1} = A_s^{-1}A_{s-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$.

Corolario 2: Si A es una matriz no singular, entonces A^{-1} es no singular y $(A^{-1})^{-1} = A$.

Propiedad 7: Si A es una matriz no singular (invertible), entonces A^T es no singular y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demostración:

De $AA^{-1} = I_n$, tomando transpuesta ambos lados $(A^{-1})^T A^T = I_n^T = I_n$

De $A^{-1}A = I_n$, tomando transpuesta $A^T(A^{-1})^T = I_n^T = I_n$

De estos dos resultados $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Corolario 3: Si A es no singular (invertible):

i) Si $k \neq 0$ $\quad (k\,A)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$.

ii) A^m, m entero positivo es invertible y $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

iii) Si A es una matriz diagonal $a_{ij} = \begin{cases} d_i \neq 0, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$ entonces A es no singular y

$$A^{-1} = [b_{ij}], \text{ donde } b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{d_i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

EJEMPLO 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz de orden 2

Es fácil verificar que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc)I_2$$

y de este modo comprobar que la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es invertible si y sólo si $ad \neq bc$ siendo en

este caso $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

EJEMPLO 4 Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso $ad - bc = 3 - (-1)(2) = 5 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

En el caso de una matriz de orden 3 o superior no se dispone de una fórmula para el cálculo de A^{-1} en el siguiente ejemplo, calculamos A^{-1} para una matriz no singular de orden 3.

EJEMPLO 5 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, hallar A^{-1}.

Solución: En este caso aplicamos la definición de inversa, sea $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$,

entonces, $$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(3)}$$

De (1) = (3) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ -a+4d & -b+4e & -c+4f \\ a+3g & b+3h & c+3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:
$$\begin{matrix} 2a+d=1 & 2b+e=0 & 2c+f=0 \\ -a+4d=0 & -b+4e=1 & -c+4f=0 \\ a+3g=0 & b+3h=0 & c+3i=1 \end{matrix}$$

de aquí obtenemos

$$a = \frac{4}{9},\ b = -\frac{1}{9},\ c = 0,\ d = \frac{1}{9},\ e = \frac{2}{9},$$

$$f = 0,\ g = -\frac{4}{27},\ h = \frac{1}{27},\ i = \frac{1}{3}$$

de donde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/9 & -1/9 & 0 \\ 1/9 & 2/9 & 0 \\ -4/27 & 1/27 & 1/3 \end{bmatrix}$$

9.5 DETERMINANTES

En esta sección trataremos sólo con matrices cuadradas. A toda matriz cuadrada A se le asocia un número llamado determinante de A. Denotaremos el determinante de una matriz cuadrada A por $|A|$ o Det(A).

Si A es una matriz cuadrada de orden 1, $A = [a_{11}]$ entonces $|A| = a_{11}$.

Si A es una matriz cuadrada de orden 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

EJEMPLO 1

Si $A = [-2]$ entonces $|A| = -2$

Si $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ entonces $|A| = 4(-2) - (-3)(5) = 7$

Para definir la determinante de una matriz de orden n, $n \geq 3$ es conveniente introducir algunos conceptos.

DEFINICIÓN 6

Si A es una matriz de orden 3, entonces el menor M_{ij} de un elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden 2 que se obtiene al omitir la fila i y la columna j de A.

Así si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se tiene:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

de la misma manera se puede obtener los menores M_{21}, M_{32}, M_{31}, M_{32} y M_{33}.

DEFINICIÓN 7

El cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} es el valor: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Es decir, para obtener el cofactor de a_{ij} encontramos el menor y lo multiplicamos por 1 o por -1, según sea la suma $i + j$ par o impar respectivamente.

Una manera sencilla de recordar el signo $(-1)^{i+j}$ asociado al cofactor A_{ij} es considerar el siguiente arreglo rectangular de signos.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

Obtener M_{11}, M_{21}, M_{22}, A_{11}, A_{21} y A_{22}:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 2(7) - 5(4) = 34$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 3(7) - 6(-4) = 45$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(7) - 2(6) = -19$$

Para obtener los cofactores nos basta anteponer a sus menores correspondientes el signo apropiado:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1)(34) = 34; \; A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)(45) = -45$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1)(-19) = -19; \; A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(-2) = 2$$

Ahora podemos definir el determinante $|A|$ de una matriz cuadrada de orden 3.

DEFINICIÓN 8

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Como $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$; $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = M_{12}$ y $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$

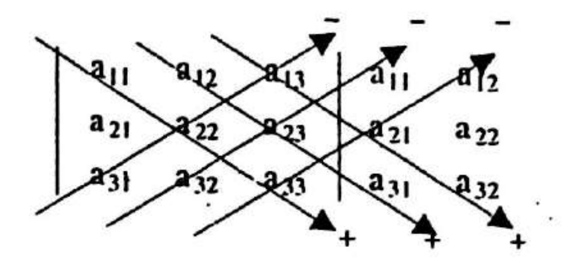
entonces:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

Si expresamos M_{11}, M_{12} y M_{13} con los elementos de A:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \ldots (*)$$

lo cual se puede recordar fácilmente con la siguiente regla:



regla que se conoce con el nombre de regla de Sarrus.

La definición de $|A|$ para una matriz A de orden 3 consiste en multiplicar cada elemento de la fila 1 por su cofactor y enseguida sumarlos, esto lo denominamos el **desarrollo de A por la primera fila**. Se puede comprobar que de una manera análoga, se halla $|A|$ usando cualquier fila o fórmula.

Así el desarrollo por la segunda columna es:

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right)d$$

esarrollando completamente se obtiene exactamente (*).

En forma análoga, se desarrolla por la tercera fila;

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{31}\left(\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right) + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right) + a_{33}\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right)$$

se obtiene nuevamente (*).

EJEMPLO 3 Evaluar:

$$|A| \text{ si } A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Puesto que hay un cero en la segunda fila, desarrollamos $|A|$ por esa fila

$$A = (2)A_{21} + (3)A_{22} + 0A_{23}$$

$$= (2)(-1)^3 M_{21} + 3(-1)^4 M_{22} = (2)(-1)(-11) + 3(1)(-3) = 13$$

La definición del determinante de una matriz de orden n, $n > 3$ se puede hacer siguiendo el patrón usado para $n = 3$.

El menor M_n de a_{ij} es la determinante de la matriz de orden n-1 que se obtiene al omitir la fila i y la columna j.

El cofactor A_{ij} es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

DEFINICIÓN 9

El determinante $|A|$ de una matriz A de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos cofactores.

Para aplicar esta definición elegimos una fila (o una columna) y procedemos a hacer el desarrollo por dicha fila (o columna).

i) Si elegimos la fila c, la definición anterior nos dice que

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

ii) Si elegimos la columna j, la definición anterior nos dice que

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

EJEMPLO 4

Calcular $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ se puede notar que

todos los elementos de la tercera fila, salvo uno, son ceros, de este modo el cálculo de $|A|$ conviene hacerlo por la fila 3.

$$|A| = (0)A_{31} + (0)A_{32} + (-5)A_{33} + (0)A_{34} = -5A_{33}$$

$$= -5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$ desarrollamos este determinante ahora por la primera columna

$$= -5\left\{(1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-2)\left(-\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right) + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -5\{5 - 2(3) + 0\} = 5$$

9.6 PROPIEDADES DE LAS DETERMINANTES

Dadas A, B y C matrices cuadradas de orden n y $k \in R$.

1) $|A| = |A^T|$

EJEMPLO 1 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ entonces $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ y

$$|A| = (1)(4) - (-3)(2) = 4 + 6 = 10$$

$$|A^T| = (1)(4) - (2)(-3) = 10$$

por lo tanto $|A| = |A^T|$

2) $|A\,B| = |A||B|$

3) Para cualquier $p \in N$, $p \neq 0$, $|A^p| = |A|^p$

4) Si A es no singular, entonces $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

5) Si se multiplica sólo una línea (fila o columna) de la matriz A por un escalar k, entonces el valor del determinante también queda multiplicado por k.

EJEMPLO 2

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

una consecuencia de esta propiedad es:

6) Si A es una matriz con una línea (fila o columna) cuyos elementos son todos nulos, el valor de $|A|$ es cero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0x0 & 0x0 & 0x0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

7) Si en la matriz A se intercambian dos líneas paralelas, el determinante de la matriz obtenida es igual a $-|A|$

8) Si la matriz A tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales, entonces $|A| = 0$.

EJEMPLO 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

6) El determinante de la matriz kA es

$$|kA| = k^n|A|$$

7) Si las matrices A, B y C difieren exclusivamente en los elementos de la columna j_0 siendo los elementos de esta columna para la matriz C la suma de los respectivos elementos de la columna j_0 de las matrices A y B, entonces

$$|A| + |B| = |C|.$$

El mismo resultado se cumple cuando las tres matrices difieren de igual forma en una fila.

EJEMPLO 4

$$\begin{vmatrix} a+b & x & y \\ u & m & n \\ r+s & t & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & y \\ u & m & n \\ r & t & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & x & y \\ o & m & n \\ s & t & z \end{vmatrix}$$

8) Si a una línea (fila o columna) de una matriz A se le suma un múltiplo de otra línea, el determinante mantiene su valor.

EJEMPLO 5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a la fila 2 se le ha sumado –k veces la fila 3.

9) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$$

EJEMPLO 6

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2)(-1)(2) = -4$$

una consecuencia de esta propiedad es que el determinante de la matriz identidad de orden n, I_n es $|I_n| = 1$.

9.7 CÁLCULO DEL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ UTILIZANDO PROPIEDADES

Las propiedades 11 y 12 nos permiten tener un método para calcular el determinante. Es posible transformar una matriz cuadrada A en una matriz triangular superior efectuando las siguientes operaciones entre filas (o entre columnas).

i) Intercambio de dos filas (o columnas).

ii) Multiplicar una fila (o columna) por una constante.

iii) Adicionar a una fila (o columna) el múltiplo de otra fila (o columna).

En cada caso es necesario tener en cuenta el posible cambio de valor que puede sufrir el determinante.

EJEMPLO 1

Calcular: $$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Cuando la fila 2 se suma a la fila 1 y a la fila 4 el valor de la determinante se mantiene.

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & -8 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

multiplicando la fila 2 por (-1)

$$d = -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & -8 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

intercambiando la fila 1 y la fila 2:

$$d = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$d = (-1)(-1)(4)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

restando a la fila 3, 4 veces la fila 2 y a la fila 4, 3 veces la fila 2:

$$d = (-1)(-1)(4)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

Finalmente factorizando 2 en la fila 3 y luego la fila resultante sumar la fila 4.

$$d = (-1)(-1)(4)(2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 23/2 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(4)(2)(1)(1)(1)(23/2) = 92$$

EJEMPLO 2 Calcular $|A|$ si A es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{bmatrix}$$

Si a las tres últimas filas de A se les resta la primera y se desarrolla por esta fila, resulta

$$|A| = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ c-a & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \\ d-a & (d-a)(d+a) & (d-a)(d^2+ad+a^2) \end{vmatrix}$$

y por la propiedad 5.

$$|A| = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

restando a la segunda y tercera fila la primera fila, desarrollando por la primera fila y utilizando (5), resulta

$$|A| = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & (c-b) & (c+b+a) \\ d-b & (d-b) & (d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 1 & d+b+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

El determinante de esta matriz A se le conoce como el de Vandermonde.

Notación: Usaremos la siguiente notación para indicar las siguientes operaciones:

1) Intercambio de dos filas (o columnas) $f_i \times f_j$ (ó $c_i \times c_j$) significa el intercambio de la fila de lugar i con la fila de lugar j (intercambio de la columna de lugar i con la columna de lugar j).

2) La suma de un múltiplo escalar de una fila (o columna) a otra fila (o columna) $f_i + kf_j$ a la fila i le sumamos el múltiplo escalar kf_j de la fija j $c_i + k\,c_j$ a la columna i le sumamos el múltiplo escalar kc_j de la columna c_j en ambos casos k es diferente de cero.

9.8 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES n x n

Propiedad 8 (Regla de Cramer):

Sea:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

y sea $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ la matriz de coeficientes, el sistemas se puede expresar matricialmente $Ax = b$ donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{si } \operatorname{Det}A \neq 0,$$

entonces el sistema tiene solución única y tal solución es;

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_1 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

donde A_j es la matriz obtenida de A al reemplazar la columna, j por b.

EJEMPLO 1 Sea el sistema:

$$\begin{array}{r} 2x_1 + \ x_2 - \ x_3 = 3 \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{array}$$

en este caso

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 1 & 1\\1 & -2 & -3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 5 \neq 0$.

Por la regla de Cramer

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\1 & 1 & 1\\4 & -2 & -3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{10}{5}=2$$

$$x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\1 & 1 & 1\\1 & 4 & -3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-5}{5}=-1$$

$$x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 1 & 1\\4 & -2 & 4\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0}{5}=0,$$

luego la solución es

$$x=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

9.9 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix}m-3n & m\\1 & n\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 6-n\\1 & 6-m\end{bmatrix}$, si $A = B$; hallar $3A + B^t$.

Solución:

Si A = B

$$\begin{bmatrix}m-3n & m\\1 & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6-n\\1 & 6-m\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}m-3n=2 & \ldots 1\\ m=6-n & \ldots 2\end{matrix}$$

De (1) y (2):

$$(6n) - 3n = 2$$

$$6 - 4n = 2$$

$$4 = 4n \rightarrow n = 1 \text{ en (2): } m = 5$$

Entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B \qquad y \qquad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$3A + B^T = 3\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A + B^T = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 2

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} p & 2 \\ q & 10 \end{bmatrix}$ son matrices conmutables, calcular el valor de la Tr(A+B).

Solución:

Si A y B son matrices conmutables, se cumple que:

$$AB = BA$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 2 \\ q & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 2 \\ q & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4p - 2q & 8 - 20 \\ 6p + 2q & 12 + 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4p + 12 & -2p + 4 \\ 4q + 60 & -2q + 20 \end{bmatrix}$$

identificando los valores de p y q:

$$-12 = -2p + 4$$

$$2p = 16, \qquad p = 8$$

$$32 = -2q + 20$$

$$2q = -32 + 20$$

$$2q = -12, \qquad q = 6$$

· Entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $\quad Tr(A+B) = Tr\,A + Tr\,B$

$$Tr(A+B) = 6 + 18 = 24$$

PROBLEMA 3

Si A es una matriz triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7-p & q+3 \\ p+1 & 2 & m \\ q & 1 & m+3 \end{bmatrix}; \text{ calcular: } m+p+q$$

Solución:

Si A es una matriz triangular inferior, entonces

$7 - p = 0 \rightarrow p = 7$

$q + 3 = 0 \rightarrow q = -3 \qquad \Rightarrow \quad m + p + q = 0 + 7 + (-3) = 4$

$m = 0$

PROBLEMA 4

El 1° de Julio, la cantidad de acciones propiedad de Carlos y José está dada por la matriz:

$$A = \begin{matrix} \\ \text{Carlos} \\ \text{José} \end{matrix} \begin{matrix} x & y & z & w \\ \left[\begin{matrix} 2000 & 1000 & 500 & 5000 \\ 1000 & 500 & 2000 & 0 \end{matrix}\right] \end{matrix}$$

y los respectivos precios al cierre de x, y, z y w fueron \$ 24, \$ 47, \$ 150 y \$ 14 la acción. Hallar los valores del total de las acciones de cada uno en esta fecha.

Solución:

Sea: $\quad B = \begin{bmatrix} 24 \\ 47 \\ 150 \\ 14 \end{bmatrix}$

Se calcula:

$$AB = \begin{matrix} \text{Carlos} \\ \text{José} \end{matrix}\begin{bmatrix} 2000 & 1000 & 500 & 5000 \\ 1000 & 500 & 2000 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 47 \\ 150 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 240{,}000 \\ 347{,}500 \end{bmatrix}\begin{matrix} \text{Carlos} \\ \text{José} \end{matrix}$$

El 1° de Julio las acciones de Carlos valían \$ 240,000 y de José \$ 347,500.

PROBLEMA 5

Pruébese que toda matriz cuadrada A puede representarse en forma única como:

$$A = A^{(s)} + A^{(as)}$$

Donde:

$A^{(s)}$ es simétrica y $A^{(as)}$ es antisimétrica

Solución:

Supongamos que $$A = A^{(s)} + A^{(as)} \quad ...(1)$$

Entonces $$A^T = A^{(s)} - A^{(as)} \quad ...(2)$$

Sumando (1) y (2)

$$A + A^T = 2A^{(s)} \Rightarrow A^{(s)} = \frac{A + A^T}{2} \quad ...(3)$$

Restando:

$$A - A^T = 2A^{(as)} \Rightarrow A^{(as)} = \frac{A - A^T}{2} \quad ...(4)$$

Obviamente sumando (3) y (4) obtenemos la matriz A. Veamos que las expresiones en (3) y (4) representan matrices simétricas y antisimétricas respectivamente.

$$\left(A^{(s)}\right)^T = \left[\frac{A + A^T}{2}\right]^T = \frac{A^T + A}{2} = A^{(s)}$$

por lo tanto la matriz $A^{(s)}$ dada en (3) es asimétrica, análogamente se ve que $A^{(as)}$ es antisimétrica.

Para ver la unicidad, podemos suponer que:

$A = A_1^{(s)} + A_2^{(as)}$ es otra representación de A, con $A_1^{(s)}$ simétrica y A_2, antisimétrica, fácilmente se obtiene que éstas supuestas nuevas matrices (simétrica y antisimétrica) están dadas por (3) y (4).

PROBLEMA 6

Hallar B^{-1}, si $B = |B|\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}$, $|B| > 0$.

Solución:

Tenemos de $$B = |B|\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix} \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}^{-1} \quad ...(2);$$

por otro lado de (1) también:

$$|B| = |B|^3\begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix}, |B|^3.(2)$$

$$\Rightarrow |B| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

reemplazando en (2) $B^{-1} = \sqrt{2}\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow B^{-1} = \sqrt{2}\begin{bmatrix}1/2 & 2 & -3\\ -3/2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} & -3\sqrt{2}\\ \frac{-3\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

PROBLEMA 7

Sea $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, donde $a_{ij} = a_{i1} = 1$, para i, j = 1, 2, 3 y $a_{ij} = a_{i(j-1)} + a_{(i-1)j}$, (i, j = 2, 3) hallar $|A|$.

Solución:

De la ley de formación de a_{ij} se tiene:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a_{22} & a_{23}\\ 1 & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

donde:

$$a_{22} = a_{21} + a_{12}$$
$$a_{23} = a_{22} + a_{13}$$
$$a_{32} = a_{31} + a_{22}$$
$$a_{33} = a_{32} + a_{23}$$

entonces:

$$a_{22} = 1 + 1 = 2; \qquad a_{23} = 2 + 1 = 3$$
$$a_{32} = 1 + 2 = 3; \qquad a_{33} = 3 + 3 = 6$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1$$

PROBLEMA 8

Dadas las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

hallar A^4, donde $A = C + D$.

Solución:

Tenemos: $A^4 = (A^2)^2 = ((C + D)^2)^2 = (C^2 + CD + DC + D^2)^2$, notemos que:

$$C^2 = 0 \text{ y } D^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

como:

$$CD = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } DC = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$CD + DC = \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$A^4 = \left(\begin{bmatrix} 16 & 20 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^2$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 20 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 & 20 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 924 & 580 \\ -145 & -91 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 9

Dadas:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Determinar:

$$B=(X^{-1}AX)^{n}$$

Solución:

$$X^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\ 1/2&-1/2&1\\0&0&1\end{bmatrix}\ \text{y}\ A^{n}=\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Ahora:

$$B=(X^{-1}AX)^{n}=X^{-1}A^{n}x$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1\\ 1/2&-1/2&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&n-1\\ 1/2&\frac{n-1}{2}&\frac{n^2-3n+4}{4}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&n\\ \frac{n}{2}&1&\frac{n(n-1)}{4}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

PROBLEMA 10

Determine todos los valores de k para que det(A) = 0, si $A=\begin{bmatrix}k-1&-2\\1&k-4\end{bmatrix}$

Solución:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}k-1&-2\\1&k-4\end{vmatrix}$$

$$=(k-1)(k-4)+2=0$$

$$=k^2-5k+6=0$$

$$=(k-2)(k-3)=0$$

$\Rightarrow$ si $k=2$ ó $k=3$ se tendrá

det(A) = 0.

PROBLEMA 11

Si det(A) = 5, donde $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, encuentre:

a) $\det\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$ b) $\det\begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{bmatrix}$

Solución:

a) Como aquí se han efectuado 2 intercambios de filas, entonces

$$\det(A_1) = (-1)^2\,|A| = 5$$

b) La primera fila se multiplica por 3, entonces $|A|$, queda multiplicada por 3, y como la tercera fila se multiplica por 4, entonces $|A|$ queda multiplicada por 4. Luego $\det(A_2) = 3 \times 4 \times 5 = 60$.

PROBLEMA 12

Si $A^TB^T = I$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; calcular $|B|$; donde I: matriz identidad.

Solución:

$$|A^TB^T| = |I| \rightarrow |A^T||B^T| = 1$$

$$|A||B| = 1 \rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} \qquad ...(1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(0-6) = -6$$

Luego en (1): $|B| = -\frac{1}{6}$

PROBLEMA 13

Si $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, $|A| = 2$

$B = [b_{ij}]_{2\times2}$; $|B| = 3$

Solución:

Simplificando E

$$E = \frac{|A|^2|B^T|}{|2B|^3|A^3|} = \frac{|A|^2|B|}{(2^2|B|)^3|A|^3} = \frac{|B|}{2^6|B|^3|A|} = \frac{1}{2^6|B|^2|A|}$$

$$E = \frac{1}{2^6 3^2.2} = \frac{1}{2^7.3^2} = \frac{1}{(128)(9)} = \frac{1}{1152}$$

PROBLEMA 14

Calcular el valor del determinante de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^4 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}_{C_2-C_1 \;\; C_3-C_2 \;\; C_4-C_3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 9 & 11 \\ 16 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}_{C_3-C_2 \;\; C_4-C_3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 7 & 2 & 2 \\ 16 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix}_{\text{idénticas}} = 0$$

PROBLEMA 15

Si $B^T . A^T = I$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, calcular $|B|$ donde I: Matriz identidad.

Solución:

$$|B^T A^T| = |I| \rightarrow |B^T||A^T| = 1 \rightarrow |B||A| = 1$$

$$|B| = \frac{1}{|A|} \qquad \ldots(2)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(0-6) = -6$$

Luego en (2) se tiene

$$|B| = -\frac{1}{6}$$

9.10 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Si $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Calcular $(A - B)^2$.

A) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

PROBLEMA 2

Resolver la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dar como respuesta la suma de todos los elementos de X.

A) 0 B) 3 C) 1 D) 4 E) 10

PROBLEMA 3

Si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 5 & a \\ b & x & 3 \end{bmatrix}$$

es simétrica, calcular $Tr(A^{-1})$.

A) -12 B) -14 C) -16 D) -13 E) -15

PROBLEMA 4

Dada la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden n y $X = I_n - [A(A^T A)^{-1}]A^T$. Hallar X^T.

A) A^T B) $I - A^T$ C) 0 D) A E) I-A

PROBLEMA 5

Sea A una matriz cuadrada no nula, tal que

$$A^2 = 2A - I$$

Calcular A^n, $n \in N$, $n > 2$.

A) $(n+1)A - nI$ B) $n^2A - I$ C) $n^2A - nI$

D) $nA - (n-1)I$ E) $nA - I$

PROBLEMA 6

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular A^n, de cómo respuesta el elemento a_{13}.

A) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ B) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ C) n D) $n-1$ E) n^2

PROBLEMA 7

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar la matriz $B = A^{25} + A^{15} + A + I$.

A) $\begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & 41 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

PROBLEMA 8

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Calcular $|A|$.

A) 14 B) 7 C) D) 28 E) 0

PROBLEMA 9

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden 4 con $|A| = 2$, calcular $M = \left|(A^T A)^{-1}(2A^T)\right|$.

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

PROBLEMA 10

Si $AB^T = I$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ Calcular $E = 7|B|$, donde I es la matriz identidad.

A) -3 B) ½ C) 1 D) 4 E) 7

PROBLEMA 11

En las siguientes proporciones A es una matriz cuadrada e I la matriz identidad. Dar el valor de verdad de ellas.

I) Si $|A - \lambda I| = 0$ entonces $|A^T - \lambda I| = 0$, $\lambda \in R$

II) Si $A^2 = A + I$ entonces $|A| \neq 0$

III) Si $B = |A|A^{2n}$ entonces $|B| = |A|^{3n}$, n entero positivo y es el orden de A.

A) FVF B) FVV C) VVF D) VFV E) FFF

PROBLEMA 12

Si $f(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 4x & 0 \\ 1+2x & 2 & 3x & 5 \\ 1+3x & 3 & 2x & 7 \\ 1+4x & 4 & x & 9 \end{vmatrix}$ donde $x \neq 0$. Entonces f(x) es igual a:

A) $(x^3 + x^2 + x + 1)x$ B) $x(x+1)^3$ C) $x^3 + x(1 - x^2) - x$

D) $x(x+1)^2(x-1)$ E) $x(x-1)^2(x+1)$

PROBLEMA 13

Si M es una matriz cuadrada de orden n y $M^{-1} = 2M^T$, determinar el valor de $|M|^2$.

A) 2^n B) 1/2 C) 1/4 D) $1/2^n$ E) $1/3^n$

PROBLEMA 14

Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

A) $(a+b)b^{n-1}$ B) $(nb+a)a^{n-1}$ C) $(nb+a)b^{n-1}$ D) $(na+b)a^{n-1}$ E) $(na+b)b^{n-1}$

PROBLEMA 15

Calcular

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

A) $(n-1)x^{n-2}$ B) $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$ C) $(n+1)x^{n-2}$ D) $(n-1)x^{n}$ E) x^{n}

9.11 TEST DE AUTOEVALUACIÓN

PROBLEMA 1

Para las matrices $A = [a_{ij}]_{9x3}$, $a_{ij} = 2_{i+j}$ y $B = [b_{ij}]_{3x10}$, $b_{ij} = i - j$, su matriz producto es $AB = C = [c_{ij}]$, hallar el elemento c_{24}.

A) -34 B) -26 C) -12 D) 12 E) 18

PROBLEMA 2

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar la matriz $B = A + A^2 + A^3 \ldots \; A^n, n \in N$

A) $\frac{n(3-n)}{2}$ B) $\frac{n(3+n)}{2}$ C) $\frac{n(2-n)}{2}$ D) n E) $\frac{n(n+1)}{2}$

PROBLEMA 3

Si $A^{31} = 2I$ y $M = I + A + A^2 + \ldots + A^{30}$. Determinar M^{-1}.

A) $A^{-1} - 2I$ B) $A^{-1} + 2I$ C) $A^{-1} - I$ D) $A + I$ E) $A - I$

PROBLEMA 4

Sea la matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$ tal que $a_{ij} = |i - j| + j - i$. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) $a_{ij} \neq 0$ si $i > j$ II) $Tr(A) = 0$ III) $|A| \neq 0$

A) VVF B) VFV C) FVF D) VFF E) FFV

PROBLEMA 5

Sea $A = (a_{ij})_{2x3} = \begin{cases} i & i \leq j \\ j & i > j \end{cases}$

$B = (b_{ij})_{3x2} = \begin{cases} j & i \leq j \\ i & i > j \end{cases}$

Calcular $Tr(AB)^{-1}$

A) 3/5 B) −7/5 C) 145 D) −15/5 E) 9/5

PROBLEMA 6

Sea A una matriz cuadrada inversible. Hallar el valor de verdad de las siguientes proporciones.

I) $\det\left(\left(A^{-1}\right)^{T}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$

II) $\det(2A) = 2^{n}\det(A)$, A de orden n

III) $\det(A-A^{T}) = 0$ para cada A de orden 5 x 5.

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) VFF

PROBLEMA 7

Sea A una matriz no singular tal que $A = |A|\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ Calcular $Tr(A^{-1})$

A) 9 B) −8 C) 7/2 D) 1 E) 0

PROBLEMA 8

Si $A = [a_{ij}]_{nxn}$ tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$, n impar, hallar $|A|$.

A) 2 B) −5 C) 0 D) 1 E) 6

PROBLEMA 9

Dada la matriz $A = [a_{ij}]_{2x3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{si } i < j \\ i+j & \text{si } i \geq j \end{cases}$. Calcular $|AA^{T}|$.

A) 148 B) 134 C) 118 D) 234 E) 218

PROBLEMA 10

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & a & x \\ c & c & c \\ b & x & b \end{bmatrix}$ desde $a < b < c < 0$, calcular los valores que puede tomar x para que $|A| > 0$.

A) <b a> B) <a b> C) <a, +∞> D)(-∞, a) E) {a, b}

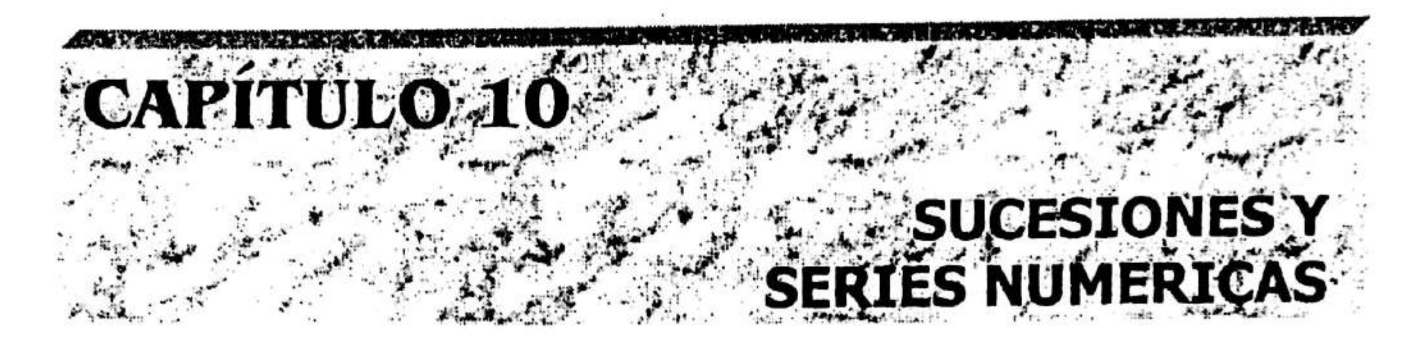
9.12 CLAVE DE RESPUESTAS

i) Problemas Propuestos

1) E	2) E	3) A	4) C	5) D
6) A	7) A	8) E	9) B	10) B
11) D	12) C	13) D	14) E	15) B

ii) Autoevaluación

1) A	2) A	3) E	4) C	5) D
6) A	7) A	8) 0	9) E	10) B



10.0 OBJETIVOS

El objetivo de este capítulo es presentar la teoría básica de sucesiones y series numéricas, así como el estudio de las progresiones aritméticas y geométricas. Es conveniente indicar que el concepto de convergencia, tanto de una sucesión como de una serie, es presentado de un modo intuitivo, sin formalizar este concepto, tarea que escapa a los objetivos del curso.

10.1 SUCESIONES NUMÉRICAS

DEFINICIÓN 1

Se llama sucesión de números reales a toda función f de N en R.

Si f es una sucesión, entonces a cada número natural n le corresponde un número real f(n).

Los números en el rango de f se pueden denotar por

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

Si hacemos $a_n = f(n)$, $n \in N$, podemos decir que una sucesión puede ser considerada como una lista ordenada de números escritos en un orden definido:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

El número a_1 es el primer término; a_2 es el segundo término y, en general, a_n es el n-ésimo término.

Notación 1:

La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ también se representa por

$$\{a_n\} \text{ ó bien } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EJEMPLO 1

La sucesión $\{3^n\}$ tiene el n-ésimo término $a_n = 3^n$. Según la definición 1, la sucesión $\{3^n\}$ es la función f tal que $f(n) = 3^n$ para cada número natural n.

EJEMPLO 2

Escribir los cuatro primeros términos de cada sucesión:

a) $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$ b) $\{3+(0.1)^n\}$ c) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$ d) $\{4\}$

Solución:

Para encontrar los cuatro primeros términos sustituimos sucesivamente n por 1, 2, 3 y 4 en la fórmula para a_n, haciendo esto (y simplificando) obtenemos lo siguiente:

Sucesión	n-ésimo término	Primeros términos
a) $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$	$\dfrac{n}{n+2}$	$\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{6}$
b) $\{3+(0.1)^n\}$	$3+(0.1)^n$	3.1, 3.01, 3.001, 3.0001
c) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$	$(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$
d) $\{4\}$	4	4, 4, 4, 4

No siempre es posible dar una expresión del n-ésimo término mediante una función explícita de n. A veces las sucesiones se definen mediante una propiedad que verifican todos sus términos (la sucesión de los números pares, la de los números primos, etc.).

Otras veces el n-ésimo término se expresa a partir de los términos anteriores (por ejemplo $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2}$, $\forall n > 2$); en este último caso se dice que la sucesión se ha definido por **recurrencia**. La palabra recurrente se utiliza para designar a este tipo de sucesiones porque para determinar un término hay que recurrir a los anteriores.

El siguiente ejemplo muestra diferentes formas de presentar una sucesión.

EJEMPLO 3

Considere las siguientes sucesiones definidas.

1. Mediante el n-ésimo término : $a_n = \dfrac{n}{n+2}$

2. Dando los primeros términos : $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$

3. A partir de una propiedad : $\{a_n / a_n \text{ es primo}\}$

4. Por recurrencia : $a_1 = 5,\ a_n = \sqrt{5a_{n-1}},\ n \geq 1.$

Representación Geométrica:

Una sucesión se puede visualizar gráficamente graficando sus términos en una recta numérica o trazando su gráfica en vista de que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, su gráfica está formada por puntos aislados cuyas coordenadas son:

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (n, a_n), \ldots$$

por ejemplo la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ se puede visualizar geométricamente por una de las dos figuras siguientes

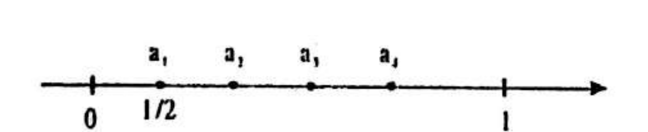


Figura 1
representación gráfica de
$a_n = \dfrac{n}{n+1}$

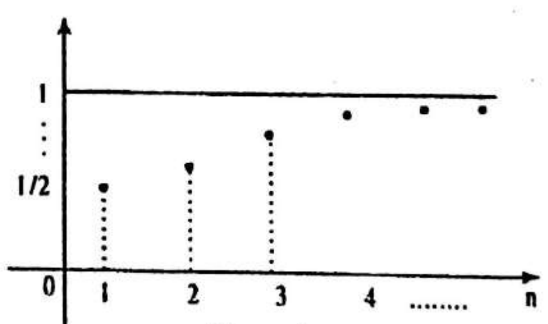


Figura 2
representación gráfica de
$a_n = \dfrac{n}{n+1}$

Observaciones:

Considere la sucesión definida mediante la función $a_n = f(n) = \sqrt{n-6}$, en este caso el dominio está formado por los números naturales $n \geq 6$. Esto nos indica que podemos ampliar la definición de sucesión considerándola como una función f cuyo dominio consiste de todos los números naturales consecutivos a partir de un número natural fijo distinto del número 1:

$$f: \{6, 7, 8, \ldots\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow f(n) = a_n = \sqrt{n-6}$$

Tipos de sucesiones

DEFINICIÓN 2

Sucesión constante: $\{a_n\}$ es una sucesión constante si $a_n = c$, $c \in \mathbb{R}$ $\forall n \in N$

EJEMPLO 4

La sucesión $\{4\}$ es constante pues $a_n = 4$, $\forall n \in N$

Este ejemplo nos sirve para indicar que todos los términos tienen el mismo valor 4

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_2 = 4 \\ a_3 = 4 \\ \quad M \end{array}\right\}$$

Pero que cada uno de ellos considerado como término de la sucesión y distinto de las demás.

Así tenemos que el primer 4 es un término distinto del tercer 4 por estar ubicados en lugares distintos; uno en el primer lugar y el otro en el tercer lugar de la misma sucesión.

DEFINICIÓN 3

Sea $\{a_n\}$ una sucesión, $\{a_n\}$ se llama:

i) Creciente: si $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in N$

ii) Decreciente: si $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in N$

iii) Monótona: si es creciente o decreciente.

EJEMPLO 5

Analizar si las siguientes sucesiones son crecientes, decreciente o monótonas.

A) $\{a^n\}$ B) $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$ C) $\{1-n\}$ D) $\{(-1)^n\}$

Solución:

a) Es clara que : $a_{n+1} = (n+1)^2 > n^2 = a_n$ entonces $\{n^2\}$ es una sucesión creciente.

b) Consideremos la diferencia: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} - \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{1-n}{2^{n+1}} \leq 0$

por lo tanto $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$ es una sucesión decreciente.

a) Considerando la diferencia

$a_{n+1} - a_n = (1-(n+1)) - (1-n) = -1 < 0$

luego $a_{n+1} - a_n < 0$ entonces $a_{n+1} < a_n$, por lo tanto $\{1-n\}$ es una sucesión decreciente.

b) En este caso

$\{(-n)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ no es creciente ni decreciente.

El ejemplo anterior podemos decir que solo a) b) y c) son monótonas.

DEFINICIÓN 4

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada, si existe $M \in R$, $M > 0$, tal que

$$|a_n| \leq M \text{ para todo } n \in N.$$

EJEMPLO 6

La sucesión $\left\{\frac{\text{Cosn}}{n^2+4}\right\}$ está acotada, pues, $\left|\frac{\text{Cosn}}{n^2+4}\right| \leq \frac{1}{n^2+4} \leq \frac{1}{4}$

en este caso un valor de M es $M = \frac{1}{4}$

Operaciones con sucesiones

Como toda sucesión es una función de N en R, entonces de las operaciones con funciones obtenemos.

DEFINICIÓN 5

i) La sucesión $\{a_n\}$ es igual a la sucesión $\{b_n\}$ si y solo si $a_n = b_n$ para todo $n \in N$.

ii) Dadas las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ se define la suma de ellas como la suma $\{c_n\}$, donde $c_n = a_n + b_n$. Se denota $\{c_n\} = \{a_n + b_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$

iii) Dadas las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ se define el producto de ellas como la sucesión $\{c_n\}$ con $c_n = a_nb_n$.

se denota $\{c_n\} = \{a_nb_n\} = \{a_n\}\{b_n\}$

iv) Dadas las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ con $b_n \neq 0$ para todo $n \in N$ se define la división de ellas como la sucesión $\{c_n\}$ con $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

Se denota $\{c_n\} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$

10.2 SUMAS FINITAS: NOTACIÓN Σ, PROPIEDADES

Dado un conjunto de números $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$ representa su suma indicada o sumatoria. Es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

La letra griega sigma mayúscula Σ denota la sumatoria y a_k representa el k–ésimo término. La letra k se llama índice de sumatoria o variable de sumatoria y adquiere valores enteros sucesivos.

EJEMPLO 1

Calcular $\sum_{k=1}^{4} k^2$

Solución:

En este caso $a_k = k^2$. Para evaluar la sumatoria sustituimos k por 1, 2, 3 y 4 y se suman los términos resultantes. Así,

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

para denotar el índice de una sumatoria se pueden usar otras letras además de k. Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{j=1}^{4} j^2 = 30$$

si $a_k = c$ para todo k, entonces

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = c + c = 2c = \sum_{k=1}^{2} c$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = c + c + c = 3c = \sum_{k=1}^{3} c$$

En general, el siguiente resultado es válido para todo entero positivo n.

TEOREMA 1

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc.$$

En la sumatoria el índice no tiene por que empezar en uno necesariamente, por ejemplo,

$$\sum_{k=5}^{9} a_k = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$$

EJEMPLO 2

Evaluar $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{2^k}{(k+2)}$

Solución:

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{2^k}{k+2} = \frac{2^1}{1+2} + \frac{2^2}{2+2} + \frac{2^3}{3+2} + \frac{2^4}{4+2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{4} + \frac{8}{5} + \frac{16}{6}$$

$$= \frac{89}{15}$$

TEOREMA 2

Sea $n \in N$ y sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ dos conjuntos de números reales.

Entonces

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right), \quad c \in R$

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

TEOREMA 3 (Propiedad telescópica)

Sea $n \in N$ y sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de números reales. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

Prueba:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\ldots+(a_n-a_{n-1})+(a_{n+1}-a_n)$$

$$=a_{n+1}-a_1$$

EJEMPLO 3

Hallar el valor de

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{2k-1}{k^2(k+1)^2}$$

Solución:

En este caso $a_k=\dfrac{2k-1}{k^2(k+1)^2}$ el cual se puede escribir como

$$a_k=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)}=-\left[\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2}\right]$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=-\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2}\right]=-\left[\frac{1}{(101)^2}-\frac{1}{1^2}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(101)^2}=\frac{10200}{10201}$$

Variante de la propiedad telescópica

$$\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_m$$

en particular para m = 1 se obtiene el teorema 3.

Sumas finitas notables:

Existen sumas finitas que son utilizadas en una serie de problemas prácticos de gran interés, los principales son:

1) $$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

2) $$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3) $$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4) $$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

La forma usual de demostrar la validez de estos resultados es utilizando un método de demostración conocido como método de inducción matemática, o aplicando la propiedad telescópica. Sin embargo demostraremos la primera de ellas de un modo distinto.

Sea $S = \sum_{k=1}^{n} k$, escribiremos dos veces esta suma, una en orden normal y la otra a la inversa.

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

Sumamos y obtenemos:

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)$$

en el lado derecho hay n sumandos, todos ellos iguales a (n+1), entonces

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

10.3 SERIES NUMÉRICAS

DEFINICIÓN 6

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. La expresión $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ se denomina **serie numérica** o simplemente **serie**

Para denotar una serie, se emplea la notación de sumatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ o bien } \sum a_n$$

En la última serie se sobreentiende que la variable de sumatoria es n Cada número a_k, k=1,2, . . . es un término de la serie y a_n es el n–ésimo término.

EJEMPLO 1

Los siguientes son ejemplos de series numéricas.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ C) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ D) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Surge una pregunta natural: ¿Qué sentido tiene hablar de la suma de una cantidad infinita de términos?.

Por ejemplo es fácil convencerse de que no es posible calcular una suma finita como la serie:

$$2+4+6+8+\ldots+2n+\ldots$$

ya que se obtiene sumas acumúladas que crecen conforme n aumenta.

Sin embargo, si comenzamos sumando los términos de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Obtenemos

n	Suma de los primeros n términos
1	0.500000
2	0.750000
3	0.875000
4	0.937500
5	0.9687500
6	0.9843750
10	0.9990234
20	0.99999905
25	0.99999997

Es decir, cuanto más términos sumemos, la suma acumuladas o parciales se acercan cada vez mas a 1. Esto nos muestra que al sumar infinitos términos podemos aproximarnos aun cierto valor o por el contrario las sumas pueden ir aumentando permanentemente.

Así cuando escribamos

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ deseamos indicar que si sumamos la cantidad suficiente de términos de la serie, podemos aproximarnos todo lo que queramos al número S.

Asi,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\frac{1}{2^n}+\ldots=1$$

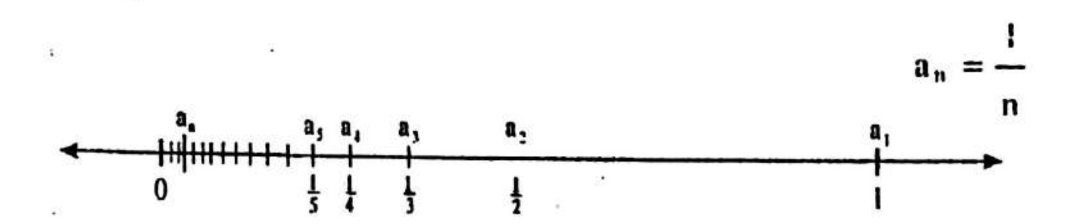
Desarrollaremos estas ideas con mas detalle en la siguiente sección donde estudiaremos el concepto de convergencia de sucesión y series numéricas.

10.4 CONVERGENCIA DE SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS

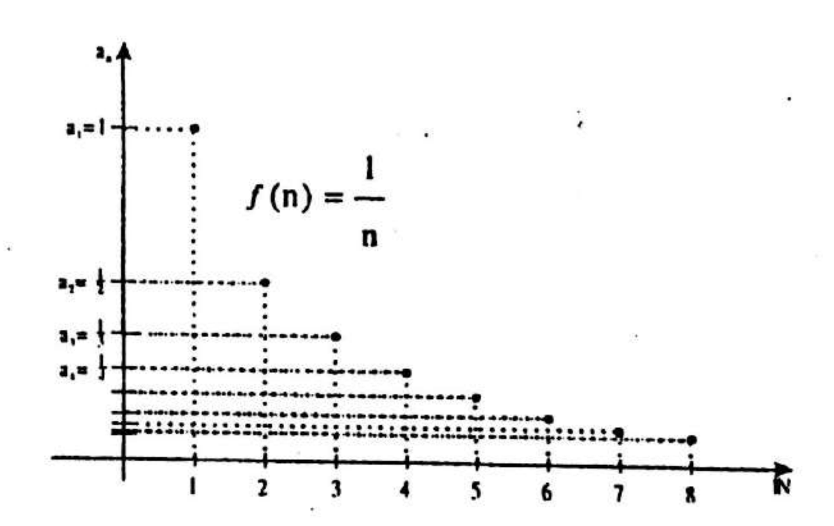
Noción intuitiva de convergencia de una sucesión

Consideremos la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ de la cual damos dos representaciones gráficas:

a)



b)



Note que la primera gráfica corresponde al eje Y de la segunda gráfica.

Observamos que conforme n aumenta, los puntos $a_n = \frac{1}{n}$ parecen acumularse alrededor del punto 0 en ambas gráficas, lo cual se expresa diciendo que "los valores $a_n = 1/n$ tienden al número 0 conforme n aumenta indefinidamente su valor, o que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ tiene límite L = 0 o también que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge hacia cero.

DEFINICIÓN 7

Si los términos de una sucesión $\{a_n\}$ se acumulan alrededor de un número real L, cuando n aumenta indefinidamente su valor, se dice que $\{a_n\}$ converge a L o bien que $\{a_n\}$ tiene límite L y simbólicamente se expresa como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad ó \quad a_n \to L \text{ si } n \to \infty$$

que se lee "**el límite de a_n es L, cuando n tiende a ∞**". En caso contrario se dice que la sucesión es divergente.

EJEMPLO 1

La sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ converge a cero, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. En general vale el siguiente resultado:

EJEMPLO 2

La sucesión $\{3^n\}$ es divergente pues 3^n se puede hacer tan grande como se desee, tomando valores grande de n, en este caso escribiremos $\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$.

TEOREMA 4

Sea $p > 0$ y $c \in R$ entonces la sucesión $\left\{\frac{c}{n^p}\right\}$ converge a cero, es decir $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0$

TEOREMA 5

Sean $\{a_n\}$ una sucesión convergente a L_2 y c un número real. Entonces:

I) $\{a_n + b_n\}$ converge a $L_1 + L_2$

II) $\{a_n - b_n\}$ converge a $L_1 - L_2$

III) $\{ca_n\}$ converge a cL_1

IV) $\{a_n b_n\}$ converge a $L_1 L_2$

V) Si $L_2 \neq 0$ entonces $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ converge a $\frac{L_1}{L_2}$.

TEOREMA 6

i) La sucesión $\{r^n\}$ converge a cero si $|r| < 1$ (es decir, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, $|r| < 1$).

ii) La sucesión $\{r^n\}$ diverge si $|r| > 1$ (es decir, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$, $|r| > 1$)

TEOREMA 7

Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Veamos algunos ejemplos de aplicación directa de los teoremas anteriores.

EJEMPLO 3

Estudiar la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{n^2+2n-1}{3n^2+n+2}\right\}$

Solución:

En este caso $$a_n = \frac{n^2+2n-1}{3n^2+n+2}$$

Se puede escribir como

$$a_n = \frac{n^2+2n-1}{3n^2+n+2} = \frac{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)} = \frac{1+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{12}}$$

el numerador converge a 1 y el denominador converge a 3, por lo tanto: a_n converge a 1/3, lo que se escribe como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n-1}{3n^2+n+2} = \dfrac{1}{3}$.

EJEMPLO 4

Estudiar la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{2^n+3^n}{2^n+4^n}\right\}$.

Solución:

En este caso $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{2^n+4^n}$, se puede escribir como:

$$a_n = \frac{2^n+3^n}{2^n+4^n} = \frac{3^n\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right)}{4^n\left(\left(\dfrac{2}{4}\right)^n+1\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left[\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\dfrac{2}{4}\right)^n+1}\right]$$

y por aplicación del teorema 5 y teorema 6(i) concluimos que a_n converge a cero es que se escribe como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n+4^n}=0$$

El número e como un límite:

El número e se define como un número al cual tiende la expresión

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{, cuando n tiende a infinito}$$

Esto se representa utilizando la siguiente notación de límite

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Cálculo aproximado de e:

n	$(1+1/n)^n$	Valor
1	$(1+1)^1$	2
2	$(1+1/2)^2$	2,25
5	$(1+1/5)^5$	2,48832...
20	$(1+1/20)^{20}$	2,65329...
100	$(1+1/100)^{100}$	2,70481...
1000	$(1+1/1000)^{1000}$	2,71688...
10000	$(1+1/10000)^{10000}$	2,71816...
$n\to\infty$	$(1+1/n)^n$	2,71828182...

Idea intuitiva de convergencia de una serie

Antes de dar la definición de serie convergente es necesario definir un concepto previo.

DEFINICIÓN 9

i) La k–ésima suma parcial S_n de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $S_k = a_1 + a_2 + , \ldots, a_k$.

ii) La sucesión de sumas parciales de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n, \ldots$

De esta definición obtendremos que

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

DEFINICIÓN 10

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si su sucesión de series parciales $\{S_n\}$ converge, es decir, si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ para un número real S.

El número S se llama suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y se escribe

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente si $\{S_n\}$ diverge. Una serie divergente no tiene suma.

Dada la definición se observa que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

EJEMPLO 5

Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente y calcula su suma.

Solución:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

se puede escribir como $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

como $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, $\{S_n\}$ converge a 1 por lo tanto la suma es convergente y su suma es 1.

EJEMPLO 6

Estudiar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$, es convergente, si lo es, calcule su suma.

Solución:

$$a_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

se puede escribir como

$$a_n = \frac{1/3}{3n+1} - \frac{1/3}{3n+4}$$

entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4}\right)$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{12}$$

la serie es convergente y $\sum \frac{1}{(3n+1)(3)} = \frac{1}{12}$

Una serie que aparece con frecuencia en la solución de muchos problemas es la llamada serie geométrica.

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

donde a y r ser números reales, con $a \neq 0$.

TEOREMA 8

Sea $a \neq 0$, la serie geométrica $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$

i) es convergente y su suma es $\frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$

ii) es divergente si $|r| > 1$.

EJEMPLO 7

Hallar la suma de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n 2^{-3n}$.

Solución:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n 2^{-3n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^n$$

Luego:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^n=\left(-\frac{1}{8}\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)^3+\left(-\frac{1}{8}\right)^4+\left(-\frac{1}{8}\right)^5+\left(-\frac{1}{8}\right)^6+\ldots.$$

$$=\left(-\frac{1}{8}\right)^2\left\{1+\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\ldots..\right\}$$

$$=\left(-\frac{1}{8}\right)^2\left\{\frac{1}{1-(-1/8)}\right\}=\frac{1}{72}$$

TEOREMA 9

Si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son series convergentes con sumas A y B, respectivamente, entonces:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge y su sumas A + B

ii) Si c es un número real, $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ converge y su suma es c.A.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ converge y su suma es A – B.

EJEMPLO 8

Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

Solución:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ se considera en el ejemplo 5 y se encuentra que es convergente y su suma es 1. La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}$ es convergente y su suma es

$\frac{1}{1-1/3}=\frac{3}{2}$.

Entonces por el teorema anterior, la serie dada es convergente y su suma es $1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ y en este caso es válido escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

10.5 PROGRESION ARITMÉTICA

DEFINICIÓN 11

Los números $a_1, a_2, \ldots a_n$ forman una progresión aritmética, si la diferencia de dos términos consecutivos es siempre una cantidad constante d la cual se llama razón de la progresión.
Si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forman una progresión aritmética se denota

$$\div\, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

y por definición

$$a_{i+1}-a_i=d \qquad i=1,2,\ldots,n-1$$

De acuerdo a esta definición tenemos

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1+d \\ a_3 = a_1+2d \\ a_4 = a_1+3d \\ \vdots \\ a_k = a_1+(k-1)d \\ \vdots \\ a_n = a_1+(n-1)d \end{cases}$$

Luego el término k–ésimo de la progresión aritmética es

$$a_k=a_1+(k-1)d, \qquad k=1,2,\ldots,n$$

y esto nos dice que en una progresión aritmética, un término cualquiera se puede obtener a partir del primer término y de la razón

EJEMPLO 1

$$\div\, 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

es una progresión aritmética de razón d = 2, lo cual es fácilmente comprobable.

EJEMPLO 2

Demostrar que los números $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no pueden ser 3 términos de una progresión aritmética.

Solución:

Suponga que en una progresión aritmética con primer término a_1 y razón d, tenemos

$$a_k = \sqrt{2} = a_1 + (k-1)d, \quad a_m = \sqrt{3} = a_1 + (m-1)d \quad a_n = \sqrt{5} = a_1 + (n-1)d$$

Restando la primera de la segunda de esta igualdad y luego la segunda de la tercera, obtenemos

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = (m-k)d \;\text{ y }\; \sqrt{5} - \sqrt{3} = (n-m)d$$

de aquí

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{m-k}{n-m} = s \text{ (el cual es un número racional)}$$

y luego

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = s\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$$

elevando al cuadrado obtenemos:

$$s^2\sqrt{15} - \sqrt{6} = \frac{8s^2 - 5}{2},$$

el segundo miembro es un número racional, el cual designaremos por r

$$s^2\sqrt{15} - \sqrt{6} = r$$

elevando al cuadrado obtenemos:

$$\sqrt{10} = \frac{155^4 - r^2 + 6}{6s^2}$$

esta igualdad muestra que $\sqrt{10}$ es un número racional lo cual es falso. Esta contradicción muestra que la igualdad $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{m-k}{n-m} = s$ no es posible y así los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{8}$ no puede ser término de una progresión aritmética.

Propiedades de una progresión aritmética

Propiedad 1 : Sea ÷ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una progresión aritmética de razón d, entonces la suma de sus términos es:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

además como $a_n = a_1 + (n-1)d$, entonces también podemos escribir

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Propiedad 2: En toda progresión aritmética de un número impar de términos, se cumple que el término central es igual a la semisuma de los términos extremos.

En el caso de n = 3, esta propiedad dice que

$$\div\ a_1, a_2, a_3 \text{ entonces } a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Propiedad 3: En toda progresión aritmética, la suma de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos

$$\div\ \underbrace{a_1, \ldots\ldots\ldots b}_{k\ \text{términos}}\ x \ldots\ldots y\ \underbrace{c \ldots a_n}_{k\ \text{términos}}$$

$$x + y = a_1 + a_n$$

Medios aritméticos:

Dada una progresión aritmética ÷ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$ se llaman medios aritméticos a los términos de la progresión comprendidas entre su primer y último término.

$$\div\ a_1, \underbrace{a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}}_{\text{medios aritméticos}}, a_n$$

Interpolación de medios aritméticos

Interpolar <u>m</u> medios aritméticos entre dos números dados a y b es formar una progresión aritmética, cuyo primer término sea a y cuyo último término sea b.

Entonces: Dados a y b al interpolar un medio entre ellas tendremos

$$a_1 = a, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{m\ \text{medios}}\ b = a_n$$

$$b = a + ((m+2) - 1)d,$$

entonces

$$\frac{b-a}{m+1} = d$$

la cual es llamada **razón de interpolación.**

EJEMPLO 3

Interpolar 4 medios entre 3 y 18.

Solución:

$$3, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, 18$$

entonces la razón de interpolación es

$$d = \frac{18-3}{4+1} = \frac{15}{5} = 3$$

Luego la progresión es:

$$\div\, 3, 6, 9, 12, 15, 18$$

10.6 PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

DEFINICIÓN 12

Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forman una progresión geométrica si el primer término es distinto de cero y cada uno de los términos siguientes es igual a su precedente multiplicado por cierto número, distinto de cero, que es constante para la sucesión dada, y es llamado razón de la progresión.

Según se deduce de esta definición, entre los términos de una progresión geométrica no puede haber ceros.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en progresión geométrica se escribe:

$$\div\div\, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

De la definición tenemos que:

$$a_1 = a_2$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

$$\vdots$$

$$a_k = a_{k-1} q = a_1 q^{k-1}$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} q = a_1 q^{n-1}$$

Es decir:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

EJEMPLO 1

Los números 2, 4, 8, 16, 32 forman una progresión geométrica de razón $q = 2$ como fácilmente se comprueba y escribimos

$$\div\div 2, 4, 8, 16, 32$$

EJEMPLO 2

¿Es una progresión aritmética ó geométrica la sucesión de números 1, 1, 1, . . . , 1?

En realidad, esta sucesión puede considerarse como programa aritmética (con diferencia cero) y como progresión geométrica (con razón 1) simultáneamente.

Propiedades de progresión geométrica

Propiedad 1: Sea $\div\div a_1, a_2, \ldots, a_n$ una progresión geométrica de razón q, entonces la suma de sus términos es

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

Propiedad 2: En toda progresión geométrica de un número impar de términos positivos, el término central es igual a la raíz cuadrada del producto de los términos extremos. En el caso $n = 3$, esta propiedad nos dice que $\div\div a_1, a_2, a_3$, entonces $a_2 = \sqrt{a_1 a_3}$.

Propiedad 3: Sea $\div\div a_1, a_2, \ldots, a_n$ una progresión geométrica, entonces el producto de sus términos es igual a la raíz cuadrada del producto de sus extremos, elevada al número de términos de la progresión

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

Propiedad 4: En toda progresión geométrica el producto de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de los extremos.

Medios geométricos: Dada una progresión geométrica $\div\div a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se llama medios geométricos a los términos de la progresión comprendidos entre su primer y último término sea b.

$$\div\div a_1, \underbrace{a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}}_{\text{medios geométricos}}, a_n$$

Interpolación de medias geométricas

Interpolar m medios geométricos entre dos números dados a y b es formar una progresión geométrica, cuyo primer término sea a y cuyo último término sea b.

Entonces, dadas a y b al interpolar m medios geométricos entre ellas tendremos

$$a_1 = a, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{m \text{ medias geométricas}} b = a_n$$

$$b = aq^{m+1}, \text{ entonces } q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

q es llamada razón de interpolación.

EJEMPLO 3

Interpolar 4 medias geométricas entre 2 y 64.

Solución:

2, •, •,•,•, 64

entonces:

$64 = 2q^5$ entre $32 = q^5$,

luego,

$q = 2$,

la progresión geométrica es

2, 4, 8, 16, 32, 64

10.7 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Calcular el valor hacia el cual converge la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

A) 0 B) 1/4 C) 1/3 D) 1/2 E) 4/5

PROBLEMA 2

Calcular el valor hacia el cual converge la sucesión

$$a_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2}{n^3 + 2n + 4}$$

A) 1/6 B) 1/4 C) 1/3 D) 1/2 E) 1

PROBLEMA 3

Determinar el valor de

$$E = \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{\sqrt{n^2+5n+6}\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}\right)}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{7}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{7}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{7}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{1}{7}$

PROBLEMA 4

Determinar el valor de verdad de las siguientes operaciones:

I) La sucesión $\{a_n\}$ con $a_n = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = 0.5(a_n + a_{n+1})$, $n \geq 1$ es una sucesión constante.

II) $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, siempre que $|r| < 1$.

III) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0$

A) VVV B) VFV C) FVV D) FVF E) FFF

PROBLEMA 5

Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^3 + 2x + 1$ y la sucesión $a_n = \frac{n+1}{n}$, halla el valor hacia el cual converge la sucesión $\{f(a_n)\}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA 6

Calcular el valor de $E = \sum_{k=1}^{20} (-1)^k k^2$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

PROBLEMA 7

Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$

A) 1 B) 3/2 C) 2 D) 5/2 E) 3

PROBLEMA 8

Tenemos una progresión geométrica de n términos, n par

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \quad a_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots n$$

determine el valor de la expresión:

$$E = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{a_{k+2}}{a_k} \text{ en términos de su razón q}$$

A) $q^2(n-1)$ B) $q^2(n+1)$ C) $q^2(n-2)$ D) $q^2(n+2)$ E) $q^2(n-3)$

PROBLEMA 9

Determine la suma

$$E = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)$$

A) $1 + n^2$ B) n^2 C) $2n^2 - n$ D) n^3 E) $n^2 + 2n$

PROBLEMA 10

Determine la suma de los 3 medios geométricos interpolados entre 8 y 1/32.

A) 15/8 B) 17/8 C) 19/8 D) 21/8 E) 23/8

10.8 TEST DE AUTOEVALUACION

PROBLEMA 1

Si el termino a_{10} de la sucesión $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{kn+10}{4n+10}$ es 1, entonces esta sucesión converge hacia:

A) 1/4 B) 4 C) 1 D) 2 E) 0

PROBLEMA 2

Dada la sucesión $\{a_n\}$, $n \in N$, talque $a_n = \dfrac{5^{n-3} + 3^{n-1}}{2^n + 5^{n-2}}$, se puede afirmar:

A) Converge a 5 B) Converge a ½ C) Converge a 2

D) Converge a 1/5 E) Diverge

PROBLEMA 3

Calcular el valor de $$\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{100}(i+j)$$

A) 100 B) 100×10^4 C) 100×10^3 D) 100×10^2 E) 100×10^5

PROBLEMA 4

De la serie $\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n+1}{2}\right]4^{-2n}$ se puede decir que converge a:

A) $\frac{1}{4^4(4^4+1)}$ B) $\frac{1}{4^4(4^4-1)}$ C) $\frac{2}{5}\ \frac{4^4}{4^4-1}$ D) $\frac{4^{16}}{4^4-1}$ E) $\frac{4^{20}}{4^5-1}$

PROBLEMA 5

Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 5

PROBLEMA 6

Calcular la suma de la serie $\sum_{n\to 0}^{\infty}(-1)^{n^3}2^{-n}$

A) 1/4 B) 1/3 C) 2/3 D) 1 E) 2

PROBLEMA 7

Tres números están en progresión aritmética, si al mayor se le suma 4 se obtiene una progresión geométrica, si la suma de dichos números es 24. Determinar el término central.

A) 6 B) 4 C) 2 D) 8 E) 7/2

PROBLEMA 8

Una progresión geométrica de razón 2 es tal que admite 5n términos, siendo la suma de los n primeros 8^{40} y la suma de los n últimos $(16)^{40}$. Calcular el número de términos.

A) 80 B) 75 C) 60 D) 50 E) 40

PROBLEMA 9

Hallar el número de medias aritméticas que es necesario interpolar entre 1 y 19 para que al segundo medio esté con el último en la relación 1/6.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

PROBLEMA 10

El número de la suma de un número infinito de términos de una progresión geométrica es $\frac{a}{1-r}$, donde a es el primer término, $-1 < r < 1$ es la razón. Calcular el límite de la suma de sus cuadrados.

A) $\frac{a^2}{1-r^2}$ B) $\frac{a}{1-r^2}$ C) $\frac{a^2}{1+r^2}$ D) $\frac{a^2}{1-r}$ E) $\frac{a}{1+r^4}$

10.9 CLAVE DE RESPUESTAS

Problemas propuestos:

1) B
2) C
3) B
4) A
5) C
6) B
7) C
8) C
9) B
10) D

Test de autoevaluación

1) C
2) D
3) B
4) B
5) C
6) C
7) D
8) D
9) E
10) A

CAPÍTULO 11

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

11.0 OBJETIVOS

Lograr que el estudiante comprenda la técnica básica del análisis combinatorio como una herramienta para el proceso de conteo y como una aplicación el binomio de Newton

11.1 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO: PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN Y PRINCIPIO DE LA ADICION

PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACION

"Si una operación p_1 tiene n_1 maneras de realizarse y para cada una de estas, la operación p_2 tiene n_2 maneras de realizarse y para cada una de las dos primeras se puede efectuar una tercera operación p_3 con n_3 maneras de realizarse y así sucesivamente, la secuencia de las k operaciones esto es, la operación p_1 y p_2 y ... y p_k se puede realizar de

$$n_1\ n_2\ n_3\ \ldots\ n_k \quad \text{maneras"}$$

EJEMPLO 1

Un estudiante tiene 8 pantalones diferentes y 10 camisas diferentes. ¿De cuantas maneras diferentes se puede vestir?

Solución: $8 \times 10 = 80$

EJEMPLO 2

De cuantas formas podemos clasificar una persona a la cual se le hace una encuesta en relación al Sexo (F , M), Estado Civil (S, C, V, D) y Estatura (bajo, mediano, alto).

Solución: $2 \times 4 \times 3 = 24$

Principio de adición

"Si una operación p_1 tiene n_1 maneras de realizarse y una segunda operación p_2 tiene n_2 maneras de realizarse ... y la k-ésima operación p_k con n_k maneras de realizarse, entonces la operación que consiste de realizar las operaciones p_1 o p_2 o ... p_k ("o" en el sentido excluyente) tiene

$$n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k \quad \text{maneras de realizarse"}$$

EJEMPLO 3

Un estudiante del CEPREUNI debe decidir por una de estas 3 carreras (Ingeniería Electrónica , Ingeniería Química e Ingeniería Civil): dentro de la carreta de Electrónica se ofrecen tres especialidades. Ingeniería Química solo una y en Ingeniería Civil 2 . ¿De cuantas maneras puede elegir una especialidad?

Solución: $3 + 1 + 2 = 6$ maneras

11.2 PERMUTACION

Factorial de un nùmero

Sea n un número **entero positivo**, el factorial de n se denota por **n!** y se define por el producto de todos los enteros consecutivos de 1 hasta n inclusive, es decir

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times ... \times n, \; n \in N$$

Por convención $0! = 1$

Así, $1! = 1$

$2! = 1 \times 2 = 2$

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

Observe que luego $6! = 6\,(5!)$ $7! = 7\,(6!)$

Luego podemos decir que : $n! = n\;(n-1)!$

Permutación de n elementos distintos

Dado un conjunto de elementos, se da el nombre de **permutación** a cada una de las ordenaciones que se pueden formar con todos los elementos del conjunto o con parte de este conjunto; por tanto en este caso se tiene en cuenta el orden.

Si el conjunto de elementos es {a, b, c} , entonces

abc acb bac bca cab cba

son las seis maneras de arreglar las letras una al lado de la otra.

El razonamiento podría simplificarse si aplicamos el principio de la multiplicación, esto es, los arreglos de las tres letras es equivalente a disponerlas en tres celdas, puesto que la operación es: seleccionar una letra y luego una segunda y luego una tercera , así

3	2	1

$3 \times 2 \times 1 = 6$

luego, el número de permutación de n elementos distintos y tomados todos a la vez es dado por

$$P_n = n!$$

Permutación de n elementos distintos tomados de r en r

Si el conjunto de elementos es {a, b, c}, y sólo se desean arreglar dos de las letras una al lado de la otra, entonces los diferentes arreglos serían

ab ba ac ca bc Ca

En este caso, aplicando el principio de la multiplicación sería:

3	2

$3 \times 2 = 6$

Luego, el número de permutaciones de n elementos distintos tomados de r en r, es dado por

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,(n-r+1)$$

Permutación con repetición (pr)

Es cuando se presentan elementos repetidos como por ejemplo: **a, a ,a, b, b,** y se desea permutar todos los elementos. En este caso se tiene

$$PR = \frac{5!}{3!\,2!}$$

Luego la fórmula para permutar con elementos repetidos es:

$$PR = \frac{n!}{n_1!\,n_2!...n_k!}$$

donde:

$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ número total de objetos

n_i = número de objetos de la i-ésima clase, $i = 1,2,...,k$.

EJEMPLO 1

Un estante en una librería tiene capacidad para 10 libros de matemáticas que tiene pasta verde, 8 de física que tiene pasta roja y 7 de química de pasta azul. ¿De cuántas maneras pueden colocarse los libros según los colores?

Solución

Como interesa sólo los colores, entonces sea $n_1 = 10$, $n_2 = 8$ y $n_3 = 7$, luego el número de permutaciones distinguibles es

$$P_{25}^{10,8,7} = \frac{25!}{10!\,8!\,7!} = 21034600$$

Permutación circular

El número de permutaciones de n objetos distintos alrededor de un círculo es

$$\boxed{P_c^n = (n-1)!}$$

EJEMPLO 2

¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar alrededor de una mesa circular un padre, la madre y sus seis hijos?

Solución

En total se tienen 2 + 6 = 8 personas, luego $P_c = (8-1)¡ = 7! = 5040$.

11.3 COMBINACIÓN

En muchos casos estaremos interesados en el número de formas de seleccionar **r** objetos de **n**, sin importar el orden. Estas selecciones se llaman combinaciones. Una combinación de objetos es aquel acto de juntarlos en donde no cuenta el orden de colocación de los objetos. La combinación de n elementos tomados de **r** en **r**, es

$$\boxed{C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

Propiedad:

$\boxed{C_r^n = C_{n-r}^n}$ luego

$$C_0^n = C_n^n = 1$$

$$C_1^n = C_{n-1}^n = n$$

$$C_2^n = C_{n-2}^n = \frac{n(n-1)}{2!},$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO

¿Cuántos comités de 3 miembros se podrán escoger de un grupo de 8 personas?

Solución

Supongamos que Pedro, María y Daniel forman un comité, ahora cambiamos el orden María, Daniel y Pedro, noten que es el mismo comité, de modo que si no nos importa el orden significa que es una combinación.

Resumen

Permutación	Permutación de n (distintos)	$P_n = n!$
	Permutación de n elementos distintos tomados de r en r	${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
	Permutación con repetición	$PR = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$
	Permutación circular	$P_c^n = (n-1)!$
Combinación		$C_r^n = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

11.4 BINOMIO DE NEWTON

Es un binomio de la forma $(a+b)^n$, para n = 0,1,2,3,.....

Sabemos :

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$ ......

$$(a+b)^n = C_0^n a^n b^0 + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

Propiedades:

1. $(a+b)^n$ $\longrightarrow$ tiene $(n+1)$ términos
2. Exponentes de a $\longrightarrow$ van disminuyendo de n hasta 0

   Exponentes de b $\longrightarrow$ van aumentando de 0 hasta n
3. En cada término, la suma de exponentes de a y b es igual a n
4. Coeficientes del 1er y último término son iguales a 1

   Coeficientes del 2do y penúltimo término son iguales a n

   En general, los coeficientes son simétricos.
5. **Término General:**

$$t_{r+1} = C_r^n \, a^{n-r} \, b^r$$

6. Término Central de $(a+b)^n$: t_c

Si n es par, entonces existe un número impar de términos $t_c = t_{(\frac{n}{2}+1)}$.

Si n es impar, entonces existe un número par de términos, por lo tanto hay dos términos centrales

$$t_{c1} = t_{(\frac{n+1}{2})} \qquad t_{c2} = t_{(\frac{n+1}{2})+1}$$

1. La suma de coeficientes de $(a+b)^n$:

$$(1+1)^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$$

EJEMPLO

Hallar el octavo término del desarrollo de $(2x-y)^{11}$

Solución:

Sea $a = 2x$, $b = -y$, $n = 11$

$$t_8 = t_{7+1} = C_7^{11} \, (2x)^4 (-y)^7 = 330\,(16)\,x^4(-y^7) = -5280\,x^4 y^7$$

11.5 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Se tienen cuatro pares de zapatos de diferentes tallas. Se desea elegir 4 zapatos.

a) ¿De cuántas maneras se pueden obtener los zapatos?

b) ¿De cuántas maneras si debe haber exactamente un par que sea de una talla específica?

c) ¿De cuántas maneras si deben haber exactamente dos pares que correspondan sus tallas?

Solución:

a) C_4^8

b) $C_1^4 C_2^3 C_1^2 C_1^2$

c) $C_2^4 C_2^2$

PROBLEMA 2

Una caja tiene 4 focos de 25 vatios, 6 de 50 vatios y 3 de 100 vatios.Se extraen 3 focos. ¿De cuántas maneras se podrán extraer , de tal modo que en la muestra este uno de cada potencia?

Solución

$$C_1^4 C_1^6 C_1^3$$

PROBLEMA 3

Se desea formar un equipo de Volley compuesto por 6 jugadoras: 4 veteranas y 2 novatas, escogidos de 8 veteranas y 7 novatas. ¿De cuántas maneras se puede formar un equipo si cada jugadora puede jugar en cualquier posición?

Solución:

$C_4^8 C_2^7 = 1470$ maneras de escoger 6 jugadoras

$C_4^8 C_2^7 \; 6! = 1470 \times 720 = 1058400$

Todas las maneras si cada jugadora juega en cualquier posición.

PROBLEMA 4

Con 5 consonantes diferentes y 4 vocales diferentes, se desea formar una palabra de 3 consonantes y 2 vocales.

a) ¿Cuántas palabras, con letras diferentes se pueden formar (no interesa la pronunciación)?.

b) ¿Cuántas si las vocales no deben estar juntas?

Solución:

a) $C_3^5 C_2^4 = 60$ maneras de seleccionar 3 consonantes y 2 vocales

El número de maneras de arreglarlas = 5! = 120

$C_3^5 C_2^4 \cdot 5! = 60 \times 120 = 7\,200$

b) Luego de seleccionar las 3 consonantes y 2 vocales, el número de maneras de arreglarlas si las vocales no deben estar juntas es = 5! – 4!.2! = 72

Luego : 60 x 72 = 4 320 formas.

PROBLEMA 5

De cuántas maneras se pueden sentar 6 personas en una mesa redonda? Y de ¿Cuántas maneras si siempre tienen que estar juntas 2 de ellas?

Solución:

Pc = (6-1)! = 5! = 120 maneras de sentarse las 6 personas.

2 x (5-1)! = 2 x 4! = 48 formas

PROBLEMA 6

De cuantas maneras se puede invitar a 6 personas ,de un total de 10 personas disponibles. Si dos parejas son casadas y van siempre juntas?

Solución:

Se separa en dos grupos , de los 2 matrimonios y las otras personas (10 – 4 = 6)

$$C_1^2 C_4^6 + C_2^2 C_2^6 + C_0^2 C_6^6$$

PROBLEMA 7

Cuál es el número total de rectas que se pueden trazar por 30 puntos, de tal forma que no existan más de dos puntos que sean colineales?

Solución

Para trazar una recta es necesario como mínimo dos puntos, notemos que si se tienen los puntos A y B al trazar una recta AB es lo mismo que la recta BA, como no interesa el orden entonces se trata de una combinación.

$$C_2^{30} = \frac{30x29}{1x2} = 435 \ rectas$$

PROBLEMA 8

Encontrar el número total de enteros positivos que pueden formarse utilizando los dígitos {1,2,3,4}, si ningún dígito ha de repetirse cuando se forma un número.

Solución

Como no especifican cuántas cifras debe tener el número, entonces el número puede ser de una cifra o dos cifras o tres cifras, esto es

$$P_1^4 + P_2^4 + P_3^4 + P_4^4 = 4 + 4x3 + 4x3x2 + 4x3x2x1 = 64 \quad \textit{números diferentes}$$

PROBLEMA 9

Un grupo está formado por 10 personas y desean formar una comisión integrada por Presidente y Secretario. ¿De cuántas maneras puede nombrarse esta comisión?

Solución

Si bien es cierto que es una selección de dos personas de un grupo de 10 personas, esta selección es con orden puesto que si se eligen a Pedro para presidente y María para secretaria, otra comisión diferente sería María de presidente y Pedro de secretario. Por tanto es una permutación de 10 tomados de 2 e dos, esto es:

$$P_2^{10} = 10 \times 9 = 90 \text{ maneras.}$$

PROBLEMA 10

Se tienen 5 libros de Álgebra, 4 de Trigonometría y 3 de Geometría.,

a) ¿De cuantas maneras se pueden colocar en un estante todos los libros si los de una misma especialidad deben estar juntos?

b) ¿De cuantas maneras si los de trigonometría deben estar juntos?

c) ¿De cuántas maneras si solo hay lugar para 4 libros y se decide que deben ser dos de matemática y 2 de trigonometría.

Solución

a) ▯ ▯ ▯

5 A 4 T 3 G

Se permutan primero los bloques, esto es de 3! = 6 formas y luego para cada una de estas formas se permutan dentro de cada bloque

$$3! \text{ X } (5! \text{ X } 4! \text{ X } 3!) = 720 \times 24 \times 6 = 622\ 080$$

b) ▯ ▭

4 T 5 A + 3 G = 8 libros

2 ! x (4! X 8!) = 1 935 360

c) Seleccionamos los dos libros de álgebra y los dos libros de trigonometría pero con orden, esto es

$$_5P_2 \ _4P_2 = 5x4 + 4 x 3 = 20 x 12 = 240$$

PROBLEMA 11

En una fila hay 7 sillas y están presentes 4 hombres y 3 mujeres:

a) De cuántas maneras pueden sentarse en la fila?

b) De cuántas maneras, si lo hombres deben estar juntos y las mujeres también?.

c) De cuántas maneras, si sólo la mujeres están juntas?

Solución:

a) 4 H y 3 M = 7

$$P_7^7 = 7! = 7x6x5x4x3x2x1 = 5040$$

b) 4H, 3M = 2 grupos por sexo = 2!

Luego dentro de cada grupo también se pueden permutar.

En total = 2! x 4! x 3! = 288

c) Las 3 mujeres forman un grupo, más los 4 H = 5!.

Dentro del grupo de las 3 M, se permutan = 3!

En total = 5! x 3!.=720

PROBLEMA 12

Un alumno de la CEPRE-UNI tiene que contestar 8 de la 10 preguntas de un examen:

a) Cuántas maneras de escoger tiene?

b) De cuantas maneras, si las 3 primeras son obligatorias?

Solución:

a) $C_8^{10} = \dfrac{10!}{2!x8!} = 45$ maneras de escoger

b) Como 3 son obligatorias, entonces faltan escoger 5 de las 7 restantes:

$= C_5^7 = 21$ maneras de escoger, si las 3 primeras son obligatorias.

PROBLEMA 13

De 6 números positivos y 8 números negativos, se eligen 4 números al azar y se multiplican. De cuántas formas se puede realizar este experimento si el producto es un número positivo?

Solución:

Para que un producto resulte positivo, entonces:

Se escoge 4 positivos, 2 positivos y 2 negativos, 4 negativos. Es decir:

$$C_4^6 + C_2^6 \times C_2^8 + C_4^8 = 15 + 15x28 + 70 = 505$$

PROBLEMA 14

Un artista ha creado 20 pinturas y exhibirá algunas entre 3 galerías. Cuatro pinturas serán enviadas a la Galería A, cuatro a la Galería B y tres a la Galería C ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?

Solución:

$$C_4^{20} \times C_4^{16} \times C_3^{12} = 1939938000$$

PROBLEMA 15

Cuantos números pares de 4 cifras se pueden formar con los dígitos: 5,4,7,3,6,0; si no se permiten repeticiones?

-- -- -- 4ó 6 + -- -- -- 0

$4 \times 4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 5760$

PROBLEMA 16

Hallar el término independiente de x, en el desarrollo de $(2x^2 - \frac{1}{x})^{12}$

Solución:

Término independiente $\longrightarrow$ exponente de $x = 0$

$$t_{r+1} = C_r^{12} (2x^2)^{12-r} (-\frac{1}{x})^r$$

$$= C_r^{12} 2^{12-r} x^{2(12-r)} (-1)^r x^{-r}$$

$$= C_r^{12} 2^{12-r} (-1)^r x^{24-3r}$$

Por lo tanto el exponente de x, se iguala a cero:

$24 - 3r = 0 \qquad r = 8$

El término independiente $= t_9 = t_{8+1} = C_8^{12} \quad 2^4(-1)^8 x^0$

$t_9 = (495)(16)(1) = 7920$

11.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

Determinar el número de planos que se pueden formar con 8 puntos si se tiene que no hay más de tres puntos que sean coplanares.

A) 56 B) 72 C) 336 D) 8 E) 24

PROBLEMA 2

¿Cuántos cuadriláteros se pueden formar con 10 rectas?

A) 210 B) 120 C) 110 D) 96 E) 240

PROBLEMA 3

Un estudiante tiene que contestar 8 de diez preguntas en un examen. Si las tres primeras son obligatorias, ¿de cuántas maneras puede escoger las preguntas?

A) 45 B) 25 C) 21 D) 18 E) 6

PROBLEMA 4

El asta de bandera de un barco tiene tres posiciones en las que pueden colocarse una bandera. Suponiendo que el barco lleva 4 banderas (diferentes) para hacer señales, ¿cuántas señales diferentes pueden hacerse con dos banderas?

A) 12 B) 24 C) 30 D) 36 E) 72

PROBLEMA 5

Una persona tiene que acomodar 6 expedientes uno sobre otro, si hay dos expedientes que no pueden estar en forma consecutiva, ¿de cuántas maneras puede acomodar los expedientes?

A) 3600 B) 600 C) 540 D) 480 E) 120

PROBLEMA 6

De un grupo formado por 7 hombres y 4 mujeres hay que escoger 6 personas de forma que entre ellas haya no menos de 2 mujeres. ¿De cuántas maneras pueden efectuarse la elección?

A) 28 B) 115 C) 271 D) 371 E) 420

PROBLEMA 7

Se quiere seleccionar 5 preguntas de un total de 12, pero 2 de ellas no pueden escogerse a la vez ¿Cuántas formas existen?.

A) 24 B) 60 C) 120 D) 672 E) 720

PROBLEMA 8

De cuántas formas podemos pedir que nos sirvan un cono de helado con dos bolitas diferentes o iguales, si en la heladería hay 5 sabores: Vainilla, lúcuma, fresa, chocolate y limón?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 75

PROBLEMA 9

Dos parejas asisten a un almuerzo con otros cuatro amigos solteros.¿De cuántas maneras se pueden sentar alrededor de una mesa redonda, si los miembros de cada pareja se mantienen vecinos?.

A) 240 B) 120 C) 480 D) 720 E) 2880

PROBLEMA 10

Hallar el exponente de a en el término independiente de x, en el desarrollo de:

$$\left(x^{m}+\frac{\sqrt[m]{a}}{x^{n}}\right)^{m+n}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 20

PROBLEMA 11

Hallar el término independiente de x en el desarrollo de

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$$

A) 7000 B) 7920 C) 4720 D) 8020 E) 5890

PROBLEMA 12

Hallar el grado absoluto del sexto termino en el desarrollo de

$$\left(x + 2y^2\right)^8$$

A) 10) 11 C) 12 D) 13 E) 14

PROBLEMA 13

Si el único término central del desarrollo de

$\left(x + \frac{y}{x}\right)^n$ es de sexto grado, el coeficiente de dicho término central es

A) 20 B) 15 C) 12 D) 28 E) 22

PROBLEMA 14

Si el sexto término del desarrollo del binomio

$\left(x^n + \frac{n}{x}\right)^n$ es de grado 9. ¿Que lugar ocupa el término de grado 17?

A) 6to B) 5to C) 4to D) 8vo E) 9no

PROBLEMA 15

Hallar el exponente de a en el termino independiente de x en el desarrollo de la potencia

$$\left(x^m + \frac{\sqrt[m]{a}}{x^n}\right)^{m+n}$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

11.7 TEST DE AUTOEVALUACIÓN

PROBLEMA 1

¿Qué diferencia hay entre Permutación y Combinación?

PROBLEMA 2

Con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7, Se seleccionan en forma aleatoria 4 dígitos, ¿De cuantas maneras se pueden elegir, si éstos números son mayores que 5000?

A) 360 B) 45 C) 320 D) 420 E) 360

PROBLEMA 3

¿Cuántas señales diferentes con cada una de 5 banderas colgadas en una línea vertical pueden formarse con 3 banderas rojas idénticas?

A) 10 B) 15 C) 25 D) 80 E) 120

PROBLEMA 4

Cuántas palabras diferentes se pueden formar con todas las letras de la palabra: Universidad.

PROBLEMA 5

¿De cuántas maneras 3 hombres y 2 mujeres pueden sentarse en una fila; si los hombres tienen que estar juntos y las mujeres también?

A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

PROBLEMA 6

De un grupo de 12 personas, 8 mujeres y cuatro hombres se desea formar comisiones de 3 personas, 2 deben ser mujeres y el otro hombre. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

A) 108 B) 112 C) 116 D) 124 E) 136

PROBLEMA 7

¿Cuántos números de 6 cifras (no repetidas) se pueden formar con los siguientes dígitos: 2, 7, 6, 9, 8 y 0.

A) 120 B) 720 C) 600 D) 180 E) 72